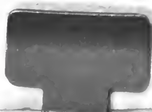

201
41 C
18





GEOMETRIA

SPECIOSA.



AD MAIOREM DEI GLORIAM

GEOMETRIÆ SPECIOSÆ ELEMENTA

PRIMVM

De poteſtatibus, à radice binomia, & reſidua.

SECVNDVM

De innumerabilibus numeroſis progreſſionibus.

TERTIVM

De quaſi proportionibus.

QVARTVM

De rationibus logarithmicis.

QVINTVM

De proprijs rationum logarithmis.

SEXTVM

De innumerabilibus quadraturis.

PETRI MENGOLI

I. V. Ph. D. Coll. Patr. Bonon. Archigymn. Mechanici.

BONONIÆ, Typis Io. Baptiſtæ Ferronij 1659.

Superiorum permiſſu.



Vidit Ouidius Montalbanus Philosophus Moralis, Mathematicus, & Iurista: & vndequaq; speciosa, & dignissima luce publica inuenit hæc Elementa, &c. Pro Reuerendiss. P. Inquisit. Bonon.

Vidit D. Iuuentius Tortus Cler. Reg. S. Pauli, Pœnit. pro Illustriss. & Reuerendiss. D. D. Hieronymo Boncompagno Archiep. Bonon. & Princ.

Imprimatur.

Fr. Gulielmus Fochus Inquisitor Bonon.



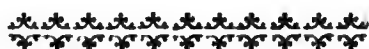
REGESTVM.

abcdefghik ABCDEFGHIKLMNOPQRST VXYZ. Aa Bb Cc Dd Ee Ff Gg Hh Ii Kk Ll Mm Nn Oo Pp Qq Rr Ss Tt Vu Xx Yy Zz. Aaa Bbb Ccc.

Omnes sunt duerniones, præter k, quæ est ternio, & c, quæ est semifol.

Amplissimo, & Integerrimo Viro
D. FERDINANDO RIARIO,

Marchioni Castilionis Orciæ, Patritio Veneto, Senatori Bononiensi, Antiquiori, & Benemerito Patri Patriæ: PETRVS MENGOLVS Fęlicitatem.





Eque Speciosæ Geometrię pulchritudini, neque tui Nominis claritati, quidquam appositum existimo, Vir Amplissime; quòd istud, in illius fronte, præfulgeat. Ipsæ satis amabiles litterarum cultoribus visæ sunt, vtraque Geometria, Archimedis antiqua, & Indiuisibilium noua Bonauenturæ Cauallerij Præceptoris mei, necnon & Viettæ Algebra: quarum, non ex confusione, aut mixtione, sed con-



iunctis perfectionibus, noua quædam,& propria laboris nostri species, nemini poterit displicere. Tuæ verò splēdor gloriæ, Mathematicas quantascunque longè prætergreditur lucubrationes: & quacunque versùm prudentia regit fortunam, præclarissimos diffundit radios; tuaque domestica sinceræ insinuat virtutis exempla. Inter quæ, singulare illud, ad bonas artes promouendas, tuæ officium est prouidentiæ; sua cuique studia consilio partiri, munificentia instruere, augere fauoribus, & auctoritate ad Magisterij decus, & perfectionem perducere. Id quod ego expertus hucusque sum ab adolescētia, tuæ

alumnus protectionis. Nam te ſuaſore primùm, deinde (poſt Caualleriũ defunctum) etiam præceptore, ſcholaſticus Mathematicus; te Vexillifero, profeſſor publicus Arithmetices, ante lauream; & poſt lauream, te noſtri Archigymnaſij moderatore, ad nouam vſque cathedrã Mechanicarum euectus: litterariam dignitatem, & fortunas omnes, tuis debeo beneficijs. Hanc itaque meam Geometriam, grati erga te animi perpetuum ſtatuo monimentum: tuorumque in me munerum aliqualem cenſum, in illius oblatione repẽdo. Fęliciori longè ſucceſſu, quàm cum alijs plerũque ſcriptoribus con-

tingit,

tingit, ſurdis vota numinibus nuncupare: tabellaſque appendere; quarum dij ſui ne quidem titulos intelligant. Tibi vni, me ipſum totum, voluntate pariter, & intellectu deditum, creditumque deuincio: qui ſi forte ſtudijs Geometriæ quidquam adiecero, propoſito conueniens titulo, nouum videlicet, atque ſpecioſum; tuam poſtulo, & expecto, noſtrorum elementorum, benigna in ſuſceptione, ſententiam. Vale. Bononiæ IX. Kal. Ianuarias MDCLX.



Lectori Elementario.



Ibi hunc librum ſcripſi, Lector, & Scholaris beneuole: ideoque nihil alienum ſumpſi, præterquam ex prioribus nouem Elementis Euclidis. Vt huius libri beneficio vtaris, tradam breuiter, ſex faciliora quædam mathemata, ſingula pro ſingulis elementis, per quæ poſſis, lectos quoſque titulos propoſitionum, numeroſis exemplis confirmare, noſtraſque demonſtrationes, arithmeticæ artis certitudine, præuenire.

Caput Primum.

Primum eſt, pro primo elemento: conſtructio poteſtatum cuiuslibet numeri binomij, vel reſidui. Eſt autem cuiuſque numeri prima poteſtas, ipſe numerus: ſecunda verò, eſt eiuſdem numeri per ſe ipſum multiplicationis productus, quæ dicitur, quadratus: tertia, eſt productus primæ poteſtatis in ſecundam, quæ dicitur, cubus: quarta, eſt productus primæ poteſtatis in tertiam, quæ dicitur, quadroquadratus: quinta, eſt productus primæ poteſtatis in quartam: & ſic deinceps in infinitum.

Poteſtates numerorum, vſque ad decimam, & vſque ad poteſtates denarij, ſequens exhibet tabella.

Numerorum *Potestates.*

Prima	Secunda	Tertia	Quarta	Quinta
2	4	8	16	32
3	9	27	81	243
4	16	64	256	1024
5	25	125	625	3125
6	36	216	1296	7776
7	49	343	2401	16807
8	64	512	4096	32768
9	81	729	6561	59049
10	100	1000	10000	100000

Numerorum *Potestates.*

	Sexta	Septima	Octaua
2	64	128	256
3	729	2187	6561
4	4096	16384	65536
5	15625	78125	390625
7	46656	279936	1679616
7	117649	823543	5764801
8	262144	2097152	16777216
9	531441	4782969	43046721
10	1000000	10000000	100000000

	Nona	*Decima*
2	512	1024
3	19683	59049
4	262144	1048576
5	1953125	9765625
6	10077696	60466176
7	40353607	282475249
8	134217728	1073741824
9	387420489	3486784401
10	1000000000	10000000000

Porrò cum Franciſco Viettæ, alijſque placuerit Analyſtis, indeterminatum quemque determinabilem numerum, eiuſque priorem poteſtatem, cuiuſpiam ſimplicis litteræ charactere ſignificare: placuit conſequenter, indeterminatas determinabiles eiuſdem numeri poteſtates alias, eiuſdem litteræ charactere ſignificare, numeris dextrorſum adſcriptis, indicantibus, quota quæque ſit poteſtas. vt exempli gratia, cum indeterminati numeri determinabilis prima poteſtas fuerit notata charactere litterę *t*; ſecunda poteſtas, charactere ſignificabitur *t*2; tertia poteſtas, charactere *t*3; quarta, *t*4; quinta, *t*5: & ſic deinceps. cum verò determinatus fuerit litteræ *t*, valor ternarius, 3: tunc determinatus erit characteris *t*2, valor 9; characteris *t*3, valor 27; characteris *t*4, valor 81; characteris *t*5, valor 243: & ſic deinceps.

 Pla-

Placuit etiam duorum indeterminatorum determinabilium numerorum poteſtatibus inuicem multiplicatis, productos, pariter indeterminatos & determinabiles numeros, iiſdem characteribus producentiũ ſignificare deinceps conſcriptis, vt ex multiplicatione *a* per *r*, productum *ar*; & ex multiplicatione *a2* per *r*, productum *a2r*, & ex multiplſcatione *a* per *r2*, productum *ar2*.

Quibus characteribus à Vietta, Herigonio, Beugrand penes Caualierium, vſitatis, conuenientia nos adinuenimus nomina. Nam productum *ar*, ex multiplicatione primarum poteſtatum *a*, & *r*, vocamus, Vniprimam: & productum *a2r*, ex multiplicatione ſecundæ poteſtatis *a*, per primam *r*, vocamus, Biprimam: productum verò *ar2*, ex multiplicatione primæ *a*, per ſecundam *r*, vocamus, Vniſecundam: & *a3r*, productum tertiæ *a*, per primam *r*, vocamus, Triprimam: & *a2r2*, ſecundæ *a*, per ſecundam *r*, Biſecundam: & *ar3*, primæ *a*, per tertiam *r*, Vnitertiam: item *a4r*, Quadriprimam: *a3r2*, Triſecundam: *a2r3*, Bitertiam: *ar4*, Vniquartam. & ſic reliquas

a5r, Quintiprimam.
a4r2, Quadriſecundam.
a3r3, Tritertiam.
a2r4, Biquartam.
ar5, Vniquintam.
a6r, Sextiprimam.
a5r2, Quintiſecundam.
a4r3, Quadritertiam.
a3r4, Triquartam.
a2r5, Biquintam.
ar6, Vniſextam.
a7r, Septimiprimam.
a6r2, Sextiſecundam.
a5r3, Quintitertiam.
a4r4, Quadriquartam.
a3r5, Triquintam.

a2r6,

a2r6, Bisextam.
ar7, Vniseptimam.
a8r, Octauiprimam.
a7r2, Septimisecundam.
a6r3, Sextitertiam.
a5r4, Quintiquartam.
a4r5, Quadriquintam.
a3r6, Trisextam.
a2r7, Bisepti mam.
ar8, Vniooctauam.
a9r, Noniprimam.
a8r2, Octauisecundam.
a7r3, Septimitertiam.
a6r4, Sextiquartam.
a5r5, Quintiquintam.
a4r6, Quadrisextam.
a3r7, Triseptimam.
a2r8, Biooctauam.
ar9, Vninonam.

Quare si litteræ *a*, taxatus fuerit valor 3, & litteræ *r*, valor 2; erit characteris *ar* vniprimæ, valor 6, productus multiplicationis 3 per 2: erit deinde characteris *a2*, valor 9; & characteris *a2r* biprimæ, valor 18: item characteris *r2*, valor erit 4; & characteris *ar2* vnisecundæ, valor 12: & sic deinceps.

Itaque sicut Euclides in 2. 8. numerosam triangularem tabulam instituit proportionalium ab vnitate, datisque minimis à numeris, datam inter se rationem habentibus: ita eadem methodo, placuit litteratam triangularem tabulam disponere proportionalium characterum, à data vnitate, propositisque duobus indeterminatis determinabilibus numeris, indeterminatam inter se rationem habentibus. Pro charactere autem vnitatis, litteram *u* collocauimus, in vertice triangularis tabulæ, & pro indeterminatis determinabilibus numeris, duas litteras *a*, & *r*.

Ta-

Tabula autem proportionalium, eſt quæ ſequitur, à verticè vſque ad decimam extenſa baſim, in qua vndecim cenſentur proportionales, in eadem ratione *a* ad *r*.

Tabula Proportionalium.

u

a *r*

a2 *ar* *r2*

a3 *a2r* *ar2* *r3*

a4 *a3r* *a2r2* *ar3* *r4*

a5 *a4r* *a3r2* *a2r3* *ar4* *r5*

a6 *a5r* *a4r2* *a3r3* *a2r4* *ar5* *r6*

a7 *a6r* *a5r2* *a4r3* *a3r4* *a2r5* *ar6* *r7*

a8 *a7r* *a6r2* *a5r3* *a4r4* *a3r5* *a2r6* *ar7* *r8*

a9 *a8r* *a7r2* *a6r3* *a5r4* *a4r5* *a3r6* *a2r7* *ar8* *r9*

a10 *a9r* *a8r2* *a7r3* *a6r4* *a5r5* *a4r6* *a3r7* *a2r8* *ar9* *r10.*

In

In qua tabula, quoniam litteræ *u*, valor est vnitas: si litteræ *a*, valor fuerit 3; litteræ verò *r*, valor 2: reliquorum characterum valores ordinantur similiter in simili tabula, quàm præcipit Euclides in præcitata prop. 2.8. Elem.

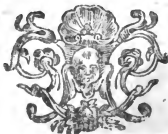
Tabula Proportionalium Eucl. Elem. 2.8.

1.
2. 3.
4. 6. 9.
8. 12. 18. 24.
16. 24. 36. 54. 81.
32. 48. 72. 108. 162. 243.
64. 96. 144. 216. 324. 486. 729.
128. 192. 288. 432. 648. 972. 1458. 2187.
256. 384. 576. 864. 1296. 1944. 2916. 4374. 6561.
512. 768. 1152. 1728. 2592. 3888. 5832. 8748. 13122. 19683.
1024. 1536. 2304. 3456. 5184. 7776. 11664. 17496. 26244. 39366. 59049.

Pla-

Placuit demum iiſdem Analyſtis,ex numero indetermi-nato, & determinabili (ſiue poteſtate, ſiue ex poteſtatibus producto) & ex determinato numero, per multiplicatio-nem factum productum indeterminatum pariter atque de-terminabilem, eodem producentis charactere ſignificari, præſcripto numero multiplicationis. vt *3a2r*, triplum pro-ductum ſub ſecunda poteſtate numeri *a*, & ſub prima nu-meri *r*; vel triplam biprimam: & *10a2r3*, decuplum pro-ductum ſub ſecunda poteſtate numeri *a*, & ſub tertia nu-meri *r*; vel decuplam bitertiam. & ſic de reliquis.

Præter tabulam proportionalium prædictam, oportet aliam tabulam triangularem habere in promptu, quam Analyſtæ vocant, multiplicium tabulam: in qua vnitates in vertice ordinantur, & in lateribus; in area verò numeri, quorum vniſquiſque inferioris baſis numerus, duorũ, ſibi, quaſi cornua fronti, adiacentium ſuperioris baſis numero-rum eſt aggregatum: vt ex ipſius tabulæ patebit lectura; quam exponimus extenſam, à vertice vſque ad decimam baſim.



Ta-

Tabula Multiplicium.

1.
1. 1.
1. 2. 1.
1. 3. 3. 1.
1. 4. 6. 4. 1.
1. 5. 10. 10. 5. 1.
1. 6. 15. 20. 15. 6. 1.
1. 7. 21. 35. 35. 21. 7. 1.
1. 8. 28. 56. 70. 56. 28. 8. 1.
1. 9. 36. 84. 126. 126. 84. 36. 9. 1.
1. 10. 45. 120. 210. 252. 210. 120. 45. 10. 1.

Vtriſque tabulis proportionalium & multiplicium ita compoſitis, vt congruant, vertex vertici, latera lateribus, baſes baſibus æqueordinatis, & vt ſingulæ proportionales congruaut ſingulis multiplicibus; ſi vnaqua que proportionalium per conguentem numerum fuerit mpltiplicata; aliaque ſimilis tabula productorum fuerit ordinata: dicetur tabula nominum: quæ ſequitur, pariter à vertice vſque ad decimam baſim extenſa.

Totarum	*Tabula N*
Primæ	a
Secundæ	a2+2
Tertiæ	a3+3a2r-
Quartæ	a4+4a3r+6a
Quintæ	a5+5a4r+10a3r2
Sextæ	a6+6a5r+15a4r2+20
Septimæ	a7+7a6r+21a5r2+35a4r3
Octauæ	a8+8a7r+28a6r2+56a5r3+70
Nonæ	a9+9a8r+36a7r2+84a6r3+126a5r4
Decimæ	a10+10a9r+45a8r2+120a7r3+210a6r4+252

Dicitur autem binomius numerus, cuius non vna tota quantitas nominatur, ſed eius duarum partium quantitates totum integrè componentium. vt numerus quinarius, tunc binomius dicetur, cum à binario, atque ternario copulatis eius partibus denominabitur, quaſi duo habens nomina. Characterem autem binomij numeri placuit ex characteribus duarum partium componi, crucicula interueniente, quæ ſignum eſt additionis. vt 2+3, valet perinde atque 5. Similiter ſi duæ partes totum binomium componentes fuerint numeri indeterminati *a*, *r*: totus binomius charactère ſignificabitur ex vtriſque compoſito, interueniente crucicula, vt *a+r*.

Itaque ſicut *a+r*, prima ſui ipſius poteſtas, ex nominibus componitur in prima baſi tabulæ nominum iacentibus; ita ſecunda poteſtas eiuſdem binomij *a+r*, ex nomi-

'ominum.

$+r$:	t
$ar+r2$:	$t2$
$3ar2+r3$:	$t3$
$r2+4ar3+r4$:	$t4$
$\cdot 10ar3+5ar4+r5$:	$t5$
$3r3+15a2r4+6ar5+r6$:	$t6$
$+35a3r4+21a2r5+7ar6+r7$:	$t7$
$4r4+56a3r5+28a2r6+8ar7+r8$:	$t8$
$+126a4r5+84a3r6+36a2r7+9ar8+r9$:	$t9$
$15r5+210a4r6+120a3r7+45a2r8+10ar9+r10$.	$t10$

nibus componitur, in ſecunda baſi iacentibus, $a2+2ar+r2$; tertia, ex nominibus, in tertia baſi, $a3+3a2r+3ar2+r3$; quarta, ex nominibus in quarta baſi, $a4+4a3r+6a2r2+4ar3+r4$: & ſic deinceps reliquæ poteſtates, ex nominibus in reliquis baſibus componuntur.

Huc innumerabilia ſpectant theoremata huiuſmodi. Si totus numerus diuiſus fuerit vtcunque in duos numeros, abſciſſum, & reſiduum: ſecunda poteſtas totius componitur, ex ſecunda poteſtate abſciſſi; duplo producto ſub abſciſſo & reſiduo, ideſt dupla vniprima; & ſecunda poteſtate reſidui. tertia poteſtas totius componitur, ex tertia poteſtate abſciſſi; triplo producto ſub ſecunda poteſtate abſciſſi, & prima reſidui, ideſt tripla biprima; triplo ſub prima abſciſſi, & ſecunda reſidui, ideſt tripla vniſecunda; & ex poteſtate tertia reſidui. quarta poteſtas totius compo-

nitur

nitur ex quarta poteſtate abſciſſi; quadruplo producto ſub tertia abſciſſi, & prima reſidui, ideſt quadrupla triprima; ſexcuplo ſub ſecundis poteſtatibus abſciſſi, & reſidui, ideſt ſeſcupla biſecunda; quadruplo ſub prima poteſtate abſciſſi, atque tertia reſidui, ideſt quadrupla vnitertia; & ex quarta poteſtate reſidui. aliaque deinceps, quorum præſtat characteres oculis percurrere, quàm voces legere, quibus ipſa poſſent exponi.

Poteſtates binomij $a+r$.

Prima $a+r$.

Secunda $a2+2ar+r2$.

Tertia $a3+3a2r+3ar2+r3$..

Quarta $a4+4a3r+6a2r2+4ar3+r4$.

Quinta $a5+5a4r+10a3r2+10a2r3+5ar4+r5$.

Sexta $a6+6a5r+15a4r2+20a3r3+15a2r4+6ar5+r6$.

Septima $a7+7a6r+21a5r2+35a4r3+35a3r4+21a2r5+7ar6+r7$.

Octaua $a8+8a7r+28a6r2+56a5r3+70a4r4+56a3r5+28a2r6+8ar7+r8$.

Nona $a9+9a8r+36a7r2+84a6r3+126a5r4+126a4r5+84a3r6+36a2r7+9ar8+r9$.

Decima $a10+10a9r+45a8r2+120a7r3+210a6r4+252a5r5+210a4r6+120a3r7+45a2r8+10ar9+r10$.

Quæ theoremata facile demonſtrabuntur per inductionem, determinato cuiuſque litteræ valore.

Eſto

Esto litteræ *a*, valor 2.
litteræ *r*, valor 3.
ideoque characteris *a+r*, valor 5.

	$a2$:	4
	$2ar$:	12
	$r2$:	9
Secunda potestas à	5 :	25
	$a3$:	8
	$3a2r$:	36
	$3ar2$:	54
	$r3$:	27
Tertia potestas à	5:	125
	$a4$:	16
	$4a3r$:	96
	$6a2r2$:	216
	$4ar3$:	216
	$r4$:	81
Quarta potestas à	5 :	625

Residuus dicitur numerus, qui duorum inæqualium numerorum, relinquitur, à maiore, minore subtracto; à quibus denominatur. vt numerus binarius, tunc residuus dice-

tur, cum à quinario, ternario dempto, relictus fuerit; & à quinario atque ternario denominatus. Characterem autem residui numeri, placuit, ex characteribus totius & abscissi denotari, à quibus denominatur, lineola, interueniente, quæ signum est subtractionis posterioris characteris à priore: vt $5 - 3$, valet perinde atque 2. Similiter si duo numeri, à quibus residuus denominatur, fuerint indeterminati, *t* maior, *a* minor, residuus charactere significabitur ex vtrisque $t - a$.

Itaque sicut $t - a$, prima suijpsius potestas, fit ex nominibus *t*, *a*, in prima basi tabulæ nominum iacentibus; ita secunda potestas eiusdem residui $t - a$, fit ex nominibus in secunda basi, alternatim additis, & subtractis, $t2 - 2ta + a2$; tertia, ex nominibus, in tertia basi $t3 - 3t2a + 3ta2 - a3$; quarta, ex nominibus, in quarta basi $t4 - 4t3a + 6t2a2 - 4ta3 + a4$: & reliquæ deinceps potestates, fiunt similiter ex nominibus, in reliquis deinceps basibus iacentibus.

Huc pariter innumerabilia pertinent huiusmodi theoremata. Si à toto quodam maiore numero, quisque minor numerus abscissus fuerit: residui secunda potestas relinquitur, ex secunda potestate totius; dempto duplo producto sub toto & abscisso, idest, dempta dupla vniprima; addita secunda potestate abscissi: tertia potestas residui, relinquitur, ex tertia potestate totius; dempto triplo producto sub secunda potestate totius & sub prima abscissi, idest dempta tripla biprima; addito triplo producto sub prima

totius

totius & sub secunda abscissi, idest addita tripla vnisecunda; dempta tertia potestate abscissi: quarta residui, relinquitur, ex quarta totius; dempto quadruplo producto sub tertia totius, & sub prima abscissi, idest, dempta quadrupla triprima; addito sexcuplo producto sub secundis potestatibus totius & abscissi, idest, addita sexcupla bisecunda; dempto quadruplo producto sub prima totius, & sub tertia abscissi, idest dempta quadrupla vnitertia; addita quarta abscissi. aliaque similia, quorum præstat characteres oculis intueri, quàm voces legere.

Potestates residui $t - a$.

Prima $t - a$.

Secunda $t^2 - 2ta + a^2$.

Tertia $t^3 - 3t^2a + 3ta^2 - a^3$.

Quarta $t^4 - 4t^3a + 6t^2a^2 - 4ta^3 + a^4$.

Quinta $t^5 - 5t^4a + 10t^3a^2 - 10t^2a^3 + 5ta^4 - a^5$.

Sexta $t^6 - 6t^5a + 15t^4a^2 - 20t^3a^3 + 15t^2a^4 - 6ta^5 + a^6$.

Septima $t^7 - 7t^6a + 21t^5a^2 - 35t^4a^3 + 35t^3a^4 - 21t^2a^5 + 7ta^6 - a^7$.

Octaua $t^8 - 8t^7a + 28t^6a^2 - 56t^5a^3 + 70t^4a^4 - 56t^3a^5 + 28t^2a^6 - 8ta^7 + a^8$.

Nona $t^9 - 9t^8a + 36t^7a^2 - 84t^6a^3 + 126t^5a^4 - 126t^4a^5 + 84t^3a^6 - 36t^2a^7 + 9ta^8 - a^9$.

Decima $t^{10} - 10t^9a + 45t^8a^2 - 120t^7a^3 + 210t^6a^4 - 252t^5a^5 + 210t^4a^6 - 120t^3a^7 + 45t^2a^8 - 10ta^9 + a^{10}$.

Quæ similiter demonstrabuntur facile per inductionem, determinato cuiusque litteræ valore.

Esto litteræ t, valor 5.
litteræ a valor 3.
ideoque characteris t--a, valor 2.

$t2$: 25	$2ta$:	30	
$a2$: 9			

34
30

Secunda potestas à 2: 4

$t3$: 125	$3t2a$:	225
$3ta2$: 135	$a3$:	27

260 252
252

Tertia potestas à 2: 8

$t4$: 625	$4t3a$:	1500
$6t2a2$: 1350	$4ta3$.	540
$a4$: 81		

2056 2040
2040

Quarta potestas à 2: 16

Si-

Similibus exemplis poteſt confirmari, tota conſtructionis poteſtatum ars, à binomijs, & reſiduis: quàm pro quantitatibus omnifariam, in primo noſtro elemento pleniùs oſtendimus.

Caput 2.

Secundum, pro ſecundo eſt elemento: multifariam progreſſiuorum regulares collectiones; in quibus præcipua noſtri inuenti pars eſt. Accipiatur quilibet numerus, cuius abſcindantur ordinatim vnitas, binarius, ternarius, & deinceps quicunque numeri poſſunt abſcindi, vt vel numerus, vel ſaltem vnitas relinquatur: & reſidui vſque ad vnitatem, totidem ſaluentur, quot abſciſſi, ſinguli reſidui è regione ſuorum abſciſſorum.

Placuit autem acceptum numerum vocare quantitatem totam, & ſignificare littera *t*: eiuſque poteſtates vocare totas; *t2*, totam ſecundam; *t3*, totam tertiam; *t4* totam quartam; & ſic deinceps. placuit etiam acceptos abſciſſos vocare quantitates abſciſſas, & ſignificare littera *a*: item abſciſſorum poteſtates, vocare abſciſſas; *a2*, abſciſſam ſecundam; *a3*, abſciſſam tertiam; *a4*, abſciſſam quartam; & deinceps: reſiduos quoque placuit vocare, quantitates reſiduas, & ſignificare littera *r*: item reſiduorum poteſtates, vocare reſiduas; *r2*, reſiduam ſecundam; *r3*, reſiduam tertiam; *r4*, reſiduam quartam; & deinceps. denique ſub poteſtatibus cuiuſque abſciſſæ, & ſuæ reſiduæ, placuit productos denominare vt ſupra, *ar* vniprimas, *a2r* biprimas, *ar2* vniſecundas, *a3r* triprimas, *a2r2* biſecun-

ſecundas, *ar3* vnitertias, & ſic deinceps.

Sed ecce tabula, in qua cuiuſque numeri ab vnitate vſque primùm ad 7. deinde vſque ad 10. pro vnaqualibet abſciſſa, ſcripta eſt è regione reſidua, & abſciſſa ſecunda, & vniprima, & reſidua ſecunda, & abſciſſa tertia, & biprima, & vniſecunda, & reſidua tertia, & ſic deinceps vſque ad proportionales in decima baſi tabulæ proportionalium iacentes.



t	a	r	a2	ar	r2	a3	a2r
2	1	1	1	1	1	1	1
3	1	2	1	2	4	1	2
	2	1	4	2	1	8	4
4	1	3	1	3	9	1	3
	2	2	4	4	4	8	8
	3	1	9	3	1	27	9
5	1	4	1	4	16	1	4
	2	3	4	6	9	8	12
	3	2	9	6	4	27	18
	4	1	16	4	1	64	16
6	1	5	1	5	25	1	5
	2	4	4	8	16	8	16
	3	3	9	9	9	27	27
	4	2	16	8	4	64	32
	5	1	25	5	1	125	25
7	1	6	1	6	36	1	6
	2	5	4	10	25	8	20
	3	4	9	12	16	27	36
	4	3	16	12	9	64	48
	5	2	25	10	4	125	50
	6	1	36	6	1	216	36

ar2

t	*ar2*	*r3*	*a4*	*a3r*	*a2r2*	*ar3*
2	1	1	1	1	1	1
3	4	8	1	2	4	8
	2	1	16	8	4	2
4	9	27	1	3	9	27
	8	8	16	16	16	16
	3	1	81	27	9	3
5	16	64	1	4	16	64
	18	27	16	24	36	54
	12	8	81	54	36	24
	4	1	256	64	16	4
6	25	125	1	5	25	125
	32	64	16	32	64	128
	27	27	81	81	81	81
	16	8	256	128	64	32
	5	1	625	125	25	5
7	36	216	1	6	36	216
	50	125	16	40	100	250
	48	64	81	108	144	192
	36	27	256	192	144	108
	20	8	625	250	100	40
	6	1	1296	216	36	6

r4

t	r^4	a^5	a^4r	a^3r^2	a^2r^3	ar^4
2	1	1	1	1	1	1
3	16	1	2	4	8	16
	1	32	16	8	4	2
4	81	1	3	9	27	81
	16	32	32	32	32	32
	1	243	81	27	9	3
5	256	1	4	16	64	256
	81	32	48	72	108	162
	16	243	162	108	72	48
	1	1024	256	64	16	4
6	625	1	5	25	125	625
	256	32	64	128	256	512
	81	243	243	243	243	243
	16	1024	512	256	128	64
	1	3125	625	125	25	5
7	1296	1	6	36	216	1296
	625	32	80	200	500	1250
	256	243	324	432	576	768
	81	1024	768	576	432	324
	16	3125	1250	500	200	80
	1	7776	1296	216	36	6

t	*r5*	*a6*	*a5r*	*a4r2*	*a3r3*
2	1	1	1	1	1
3	32	1	2	4	8
	1	64	32	16	8
4	243	1	3	9	27
	32	64	64	64	64
	1	729	243	81	27
5	1024	1	4	16	64
	243	64	96	144	216
	32	729	486	324	216
	1	4096	1024	256	64
6	3125	1	5	25	125
	1024	64	128	256	512
	243	729	729	729	729
	32	4096	2048	1024	512
	1	15625	3125	625	125
7	7776	1	6	36	216
	3125	64	160	400	1000
	1024	729	972	1296	1728
	243	4096	3072	2304	1728
	32	15625	6250	2500	1000
	1	46656	7776	1296	216

a^2r4

t	a2r4	ar5	r6	a7	a6r
2	1	1	1	1	1
3	16	32	64	1	2
	4	2	1	128	64
4	81	243	729	1	3
	64	64	64	128	128
	9	3	1	2187	729
5	256	1024	4096	1	4
	324	486	729	128	192
	144	96	64	2187	1458
	16	4	1	16384	4096
6	625	3125	15625	1	5
	1024	2048	4096	128	256
	729	729	729	2187	2187
	256	128	64	16384	8192
	25	5	1	78125	15625
7	1296	7776	46656	1	6
	2500	6250	15625	128	320
	2304	3072	4096	2187	2916
	1296	972	729	16384	12288
	400	160	64	78125	31250
	36	6	1	279936	46656

t	a5r2	a4r3	a3r4	a2r5	ar6
2	1	1	1	1	1
3	4	8	16	32	64
	32	16	8	4	2
4	9	27	81	243	729
	128	128	128	128	128
	243	81	27	9	3
5	16	64	256	1024	4096
	288	432	648	972	1458
	972	648	432	288	192
	1024	256	64	16	4
6	25	125	625	3125	15625
	512	1024	2048	4096	8192
	2187	2187	2187	2187	2187
	4096	2048	1024	512	256
	3125	625	125	25	5
7	36	216	1296	7776	46656
	800	2000	5000	12500	31250
	3888	5184	6912	9216	12288
	9216	6912	5184	3888	2916
	12500	5000	2000	800	320
	7776	1296	216	36	6

t	r7	a8	a7r	a6r2	a5r3
2	1	1	1	1	1
3	128	1	2	4	8
	1	256	128	64	32
4	2187	1	3	9	27
	128	256	256	526	256
	1	6561	2187	729	243
5	16384	1	4	16	64
	2187	256	384	576	864
	128	6561	4374	2916	1944
	1	65536	16384	4096	1024
6	78125	1	5	25	125
	16384	256	512	1024	2048
	2187	6561	6561	6561	6561
	128	65536	32768	16384	8192
	1	390625	78125	15625	3125
7	279936	1	6	36	216
	78125	256	640	1600	4000
	16384	6561	8748	11664	15552
	2187	65536	49152	36864	27648
	128	390625	156250	62500	25000
	1	1679616	279936	46656	7776

t	a^4r^4	a^3r^5	a^2r^6	ar^7	r^8
2	1	1	1	1	1
3	16	32	64	128	256
	16	8	4	2	1
4	81	243	729	2187	6561
	256	256	256	256	256
	81	27	9	3	1
5	256	1024	4096	16384	65536
	1296	1944	2916	4374	6561
	1296	864	576	384	256
	256	64	16	4	1
6	625	3125	15625	78125	390625
	4096	8192	16384	32768	65536
	6561	6561	6561	6561	6561
	4096	2048	1024	512	256
	625	125	25	5	1
7	1296	7776	46656	279936	1679616
	10000	25000	62500	156250	390625
	20736	27648	36864	49152	65536
	20736	15552	11664	8748	6561
	10000	4000	1600	640	256
	1296	216	36	6	1

t	*a9*	*a8r*	*a7r2*	*a6r3*
2	1	1	1	1
3	1	2	4	8
	512	256	128	64
4	1	3	9	27
	512	512	512	512
	19683	6561	2187	729
5	1	4	16	64
	512	768	1152	1728
	19683	13122	8748	5832
	262144	65536	16384	4096
6	1	5	25	125
	512	1024	2048	4096
	19683	19683	19683	19683
	262144	131072	65536	32768
	1953125	390625	78125	15625
7	1	6	36	216
	512	1280	3200	8000
	19683	26244	34992	46656
	262144	196608	147456	110592
	1953125	781250	312500	125000
	10077696	1679616	279936	46656

a5r4

t	a^5r^4	a^4r^5	a^3r^6	a^2r^7	ar^8
2	1	1	1	1	1
3	16	32	64	128	256
	32	16	8	4	2
4	81	243	729	2187	6561
	512	512	512	512	512
	243	81	27	9	3
5	256	1024	4096	16384	65536
	2592	3888	5832	8748	13122
	3888	2592	1728	1152	768
	1024	256	64	16	4
6	625	3125	15625	78125	390625
	8192	16384	32768	65536	131072
	19683	19683	19683	19683	19683
	16384	8192	4096	2048	1024
	3125	625	125	25	5
7	1296	7776	46656	279936	1679616
	20000	50000	125000	312500	781250
	62208	82944	110592	147456	196608
	82944	62208	46656	34992	26244
	50000	20000	8000	3200	1280
	7776	1296	216	36	6

1	r9	a10	a9r	a8r2
2	1	1	1	1
3	512	1	2	4
	1	1024	512	256
4	19683	1	3	9
	512	1024	1024	1024
	1	59049	19683	6561
5	262144	1	4	16
	19683	1024	1536	2304
	512	59049	39366	26244
	1	1048576	262144	65536
6	1953125	1	5	25
	262144	1024	2048	4096
	19683	59049	59049	59049
	512	1048576	524288	262144
	1	9765625	1953125	390625
7	10077696	1	6	36
	1953125	1024	2560	6400
	262144	59049	78732	104976
	19683	1048576	786432	589824
	512	9765625	3906250	1562500
	1	60466176	10076696	1679616

1	a7r3	a6r4	a5r5	a46r
2	1	1	1	1
3	8	16	32	64
	128	64	32	16
4	27	81	243	729
	1024	1024	1024	1024
	2187	729	243	81
5	64	256	1024	4096
	3456	5184	7776	11664
	17496	11664	7776	5184
	16384	4096	1024	256
6	125	625	3125	15265
	8192	16384	32768	65536
	59049	59049	59049	59049
	131072	65536	32768	16384
	78125	15625	3125	625
7	216	1296	7776	46656
	16000	40000	100000	250000
	139968	186624	248832	331776
	442368	331776	248832	186624
	625000	250000	100000	40000
	279936	46656	7776	1296

a3r7

r	a3r7	a2r8	ar9	r10
2	1	1	1	1
3	128	256	512	1024
	8	4	2	1
4	2187	6561	19683	59049
	1024	1024	1024	1024
	27	9	3	1
5	16384	65536	262144	1048576
	17496	26244	39366	59049
	3456	2304	1536	1024
	64	16	4	1
6	78125	390625	1953125	9765625
	131072	262144	524288	1048576
	59049	59049	59049	59049
	8192	4096	2048	1024
	125	25	5	1
7	279936	1679616	10077696	60466176
	625000	1562500	3906250	9765625
	442368	589824	786432	1048576
	139968	104976	78732	59049
	16000	6400	2560	1024
	216	36	6	1

 Sequitur Tabula pro numeris 8, 9, & 10.

t	a	r	a2	ar	r2	a3	a2r
8	1	7	1	7	49	1	7
	2	6	4	12	36	8	24
	3	5	9	15	25	27	45
	4	4	16	16	16	64	64
	5	3	25	15	9	125	75
	6	2	36	12	4	216	72
	7	1	49	7	1	343	49
9	1	8	1	8	64	1	8
	2	7	4	14	49	8	28
	3	6	9	18	36	27	54
	4	5	16	20	25	64	80
	5	4	25	20	16	125	100
	6	3	36	18	9	216	108
	7	2	49	14	4	343	98
	8	1	64	8	1	512	64
10	1	9	1	9	81	1	9
	2	8	4	16	64	8	32
	3	7	9	21	49	27	63
	4	6	16	24	36	64	96
	5	5	25	25	25	125	125
	6	4	36	24	16	216	144
	7	3	49	21	9	343	147
	8	2	64	16	4	512	128
	9	1	81	9	1	729	81

ar

t	ar2	r3	a4	a3r	a^2r2	ar3
8	49	343	1	7	49	343
	72	216	16	48	144	432
	75	125	81	135	225	375
	64	64	256	256	256	256
	45	27	625	375	225	135
	24	8	1296	432	144	48
	7	1	2401	343	49	7
9	64	512	1	8	64	512
	98	343	16	56	196	686
	108	216	81	162	324	648
	100	125	256	320	400	500
	80	64	625	500	400	320
	54	27	1256	648	324	162
	28	8	2401	686	196	56
	8	1	4096	512	64	8
10	81	729	1	9	81	729
	128	512	16	64	256	1024
	147	343	81	189	441	1029
	144	216	256	384	576	864
	125	125	625	625	625	625
	96	64	1296	864	576	384
	63	27	2401	1029	441	189
	32	8	4096	1024	256	64
	9	1	6561	729	81	9

t	r4	a5	a4r	a3r2	a2r3	ar4
8	2401	1	7	49	343	2401
	1296	32	96	288	864	2592
	625	243	405	675	1125	1875
	256	1024	1024	1024	1024	1024
	81	3125	1875	1125	675	405
	16	7776	2592	864	288	96
	1	16807	2401	343	49	7
9	4096	1	8	64	512	4096
	2401	32	112	392	1372	4802
	1296	243	486	972	1944	3888
	625	1024	1280	1600	2000	2500
	256	3125	2500	2000	1600	1280
	81	7776	3888	1944	972	486
	16	16807	4802	1372	392	112
	1	32768	4096	512	6	8
10	6561	1	9	81	729	6561
	4096	32	128	512	2048	8192
	2401	243	567	1323	3087	7203
	1296	1024	1536	2304	3456	5184
	625	3125	3125	3125	3125	3125
	256	7776	5184	3456	2304	1536
	81	16807	7203	3087	1323	567
	16	32768	8192	2048	512	128
	1	59049	6561	729	81	9

t	r^5	a^6	a^5r	a^4r^2	a^3r^3
8	16807	1	7	49	343
	7776	64	192	576	1728
	3125	729	1215	2025	3375
	1024	4096	4096	4096	4096
	243	15625	9375	5625	3375
	32	46656	15552	5084	1728
	1	117649	16807	401	343
9	32768	1	8	64	512
	16807	64	224	784	2744
	7776	729	1458	2916	5832
	3125	4096	5120	6400	8000
	1024	15625	12500	10000	8000
	243	46656	233 8	11664	5832
	32	117649	33614	9604	2744
	1	262144	32768	4096	512
10	59049	1	9	81	729
	32768	64	256	1024	4096
	16807	729	1701	3969	9261
	7776	4096	6144	9216	13824
	3125	15625	15625	15625	15625
	1024	46656	31104	20736	13824
	243	117649	50421	21609	9261
	32	262144	65536	16384	4096
	1	531441	59049	6561	729

t	a2r4	ar5	r6	a7	a6r
8	2401	16807	117649	1	7
	5084	15552	46656	128	384
	5625	9375	15625	2187	36 5
	4096	4096	4096	16384	16384
	2025	1215	729	78125	46875
	576	192	64	279936	93312
	49	7	1	823543	117649
9	4096	32768	262144	1	8
	9604	33614	117649	128	448
	11664	23328	46656	2187	4374
	10000	12500	15625	16384	20480
	6400	5120	4096	78125	62500
	2916	1458	729	279936	139968
	784	224	64	823543	235298
	64	8	1	2097152	262144
10	6561	59049	531441	1	9
	16384	65536	262144	128	512
	21609	50421	117649	2187	5103
	20736	31104	46656	16384	24576
	15625	15625	15625	78125	78125
	9216	6144	4096	279936	186624
	3969	1701	729	823543	352947
	1024	256	64	2097152	524288
	81	9	1	4782969	531441

	a5r2	a4r3	a3r4	a2r5	ar6	r7
8	49	343	2401	16807	117649	823543
	1152	3456	10168	31104	93312	279936
	6075	10125	16875	28125	46875	78125
	16384	16384	16384	16384	16384	16384
	28125	16875	10125	6075	3645	2187
	31104	10168	3456	1152	384	128
	16807	2401	343	49	7	1
9	64	512	4096	32768	262144	2097152
	1568	5488	19208	67228	235298	823543
	8748	17496	34992	69984	139968	279936
	25600	32000	40000	50000	62500	78125
	50000	40000	32000	25600	20480	16384
	69984	34992	17496	8748	4374	2187
	67228	19208	5488	1568	448	128
	32768	4096	512	64	8	1
10	81	729	6561	59049	531441	4782969
	2048	8192	32768	131072	524288	2097152
	11907	27783	64827	151263	352947	823543
	36864	55296	82944	124416	186624	279936
	78125	78125	78125	78125	78125	78125
	124416	82944	55296	36864	24576	16384
	151263	64827	27783	11907	5103	2187
	131072	32768	8192	2048	512	128
	59049	6561	729	81	9	1
						a8

t	a8	a7r	a6r2	a5r3	a4r4
8	1	7	49	343	2401
	256	768	2304	6912	19936
	6561	10935	18225	30375	50625
	65536	65536	65536	65536	65536
	390625	234375	140625	84375	50625
	1679616	559872	186624	61008	19936
	5764801	823543	117649	16807	2401
9	1	8	64	512	4096
	256	896	3136	10976	38416
	6561	13122	26244	52488	104976
	65536	81920	102400	128000	160000
	390625	312500	250000	200000	160000
	1679616	839808	419904	209952	104976
	5764801	1647086	470596	134456	38416
	16777216	2097152	262144	32768	4096
10	1	9	81	729	6561
	256	1024	4096	16384	65536
	6561	15309	35721	83349	194481
	65536	98304	147456	221184	331776
	390625	390625	390625	390625	390625
	1679616	1119744	746496	497664	331776
	5764801	2470629	1058841	453789	194481
	16777216	4194304	1048576	262144	65536
	43046721	4782969	531441	59049	6561

1	a^3r^5	a^2r^6	ar^7	r^8
8	16807	117649	823543	5764801
	61008	186624	559872	1679616
	84375	140625	234375	390625
	65536	65536	65536	65536
	30375	18225	10935	6561
	6912	2304	768	256
	343	49	7	1
9	32768	262144	2097152	16777216
	134456	470596	1647086	5764801
	209952	419904	839808	1679616
	200000	250000	312500	390625
	128000	102400	81920	65536
	52488	26244	13122	6561
	10976	3136	896	256
	12	64	8	1
10	59049	531441	4782969	43046721
	262144	1048576	4194304	16777216
	453789	1058841	2470629	5764801
	497664	746496	1119744	1679616
	390625	390625	390625	390625
	221184	147456	98304	65536
	83349	35721	15309	6561
	16384	4096	1024	256
	729	81	9	1

t	a9	a8r	a7r2	a6r3
8	1	7	49	343
	512	1536	6408	13824
	19683	32805	54675	91125
	262144	262144	262144	262144
	1953125	1171875	703125	421875
	10077696	3349232	1119744	366048
	40353607	5764861	823543	117649
9	1	8	64	512
	512	1792	6272	21952
	19683	39366	78732	157464
	262144	327680	409600	512000
	1953125	1562500	1250000	1000000
	10077696	5038848	2519424	1259712
	40353607	11529602	3294172	941192
	134217728	16777216	2097152	262144
10	1	9	81	729
	512	2048	8192	32768
	19683	45927	107163	250047
	262144	393216	589824	884736
	1953125	1953125	1953125	1953125
	10077696	6718464	4478976	2985984
	40353607	17294403	7411887	31765 3
	134217728	33554432	8388608	2097152
	387420489	43046721	4782969	531441

a5r4

t	a^5r^4	a^4r^5	a^3r^6	a^2r^7	ar^8
8	2401	16807	117649	823543	5764861
	39872	124416	366048	1119744	3349232
	151875	253125	421875	703125	1171875
	262144	262144	262144	262144	262144
	253125	151875	91125	54675	32805
	124416	39872	13824	4608	1536
	16807	2401	343	49	7
9	4096	32768	262144	2097152	16777216
	76832	268912	941192	3294172	11529602
	314928	629856	1259712	2519424	5038848
	640000	800000	1000000	1250000	1562500
	800000	640000	512000	409600	327680
	629856	314928	157464	78732	39366
	268912	76832	21952	6272	1792
	32768	4096	512	64	8
10	6561	59049	531441	4782969	43046721
	131072	524288	2097152	8388603	33554432
	583443	1361367	3176523	7411887	17294403
	1327104	1990656	2985984	4478976	6718464
	1953125	1953125	1953125	1953125	1953125
	1990656	1327104	884736	589824	393216
	1361367	583443	250047	107163	45927
	524288	131072	32768	8192	2048
	59049	6561	729	81	9

t	r^9	a^{10}	a^9r	a^8r^2
8	40353607	1	7	49
	10077696	1024	3072	9216
	1953125	59049	98415	164025
	262144	1048576	1048576	1048576
	19683	9765625	5859375	3515625
	512	60466176	20155392	6698464
	1	282475249	40353607	5764861
9	134217728	1	8	64
	40353607	1024	3584	12544
	10077696	59049	118098	236196
	1953125	1048576	1310720	1638400
	262144	9765625	7812500	6250000
	19683	60466176	30233088	15116544
	512	282475249	80707214	23059204
	1	1073741824	134217728	16777216
10	387420489	1	9	81
	134217728	1024	4096	16384
	40353607	59049	137781	321489
	10077696	1048576	1572864	2359296
	1953125	9765625	9765625	9765625
	262144	60466176	40310784	26873856
	19683	282475249	121060821	51883209
	512	1073741824	268435456	67108864
	1	3486784401	387420489	43046721

t	a7r3	a6r4	a5r5	a4r6
8	343	2401	16807	117649
	27648	79744	248832	746496
	273375	455625	759375	1265625
	1048576	1048576	1048576	1048576
	2109375	1265625	759375	455625
	2196288	746496	248832	79744
	823543	117649	16807	2401
9	512	4096	32768	262144
	43904	153664	537824	1882384
	472392	944784	1889566	3779136
	2048000	2560000	3200000	4000000
	5000000	4000000	3200000	2560000
	7558272	3779136	1889566	944784
	6588344	1882384	537824	153664
	2097152	262144	32768	4096
10	729	6561	59049	531441
	65536	262144	1048576	4194304
	750141	1750329	4084101	9529569
	3538944	5308416	7962624	11943936
	9765625	9765625	9765625	9765625
	17915904	11943936	7962624	5308416
	22235661	9529569	4084101	1750329
	16777216	4194304	1048576	262144
	4782969	531441	59049	6561

t	a^3r^7	a^2r^8	ar^9	r^{10}
8	823543	5764861	40353607	282475249
	2196288	6698464	20155392	60466176
	2109375	3515625	5859375	9765625
	1048576	1048576	1048576	1048576
	164025	164025	98415	59049
	9216	9216	3072	1024
	49	49	7	1
9	2097152	16777216	134217728	1073741824
	6588344	23059204	80707214	282475249
	7558272	15116544	30233088	60466176
	5000000	6250000	7812500	9765625
	2048000	1638400	1310720	1048576
	472392	236196	118098	59049
	43904	12544	3584	1024
	512	64	8	1
10	4782969	43046721	387420489	3486784401
	16777216	67108864	268435456	1073741824
	22235661	51883209	121060821	282475249
	17915904	26873856	40310784	60466176
	9765625	9765625	9765625	9765625
	3538944	2359296	1572864	1048576
	750141	321489	137781	59049
	65536	16384	4096	1024
	729	81	9	1

In præcedenti tabula 'progreſſiuas quantitates expandimus: in ſequenti colligimus, cuiuſque numeri maſſas ex omnibus eiuſdem appellationis proportionalibus, pro vnaquaque numeri abſciſſione ſupra ſingillatim acceptis: videlicet maſſam ex omnibus abſciſſis, quàm ſignificamus charactere *O. a*; & maſſam ex omnibus reſiduis, *O. r*; & maſſam ex omnibus abſciſſis ſecundis *O.a2*; & maſſam ex omnibus vniprimis *O.ar*; & maſſam ex omnibus reſiduis ſecundis, *O.r3*; & reliquas deinceps, quatenus præcedens tabula expanditur.

	O.r	*O.r2*		*O.r3*	*O.ar2*	*O.r4*
1	*O.a*	*O.a2*	*O.ar*	*O.a3*	*O.a2r*	*O.a4*
2	1	1	1	1	1	1
3	3	5	4	9	6	17
4	6	14	10	36	20	98
5	10	30	20	100	50	354
6	15	55	35	225	105	979
7	21	91	56	441	196	2275
8	28	140	84	784	336	4676
9	36	204	120	1296	540	8772
10	45	285	165	2025	825	15333

t	O.ar3 O.a3r	O.a2r2.	O.r5 O.a5	O.ar4 O.a4r	O.a2r3 O.a3r2	O.r6 O.a6
2	1	1	1	1	1	1
3	10	8	33	18	12	65
4	46	34	276	116	68	794
5	146	104	1300	470	260	4890
6	371	259	4425	1449	777	20515
7	812	560	12201	3724	1960	67171
8	1596	1092	29008	8400	4368	184820
9	2892	1968	61776	17172	8856	446964
10	4917	3333	120825	32505	16665	978405

t	O.ar5 O.a5r	O.a2r4 O.a4r2	O.a3r3	O.r7 O.a7	O.ar6 O a6r
2	1	1	1	1	1
3	34	20	16	129	66
4	310	154	118	2316	860
5	1610	740	560	18700	5750
6	6035	2659	2003	96825	26265
7	18236	7832	5888	376761	93436
8	47244	19856	14988	1200304	278256
9	109020	45528	34176	3297456	725220
10	229845	95205	71445	8080425	1703625

t	O.a2r5 O.a5r2	O.a3r4 O.a4r3	O.r8 O.a8	O.ar7 O.a7r	O.a2r6 O.a6r2
2	1	1	1	1	1
3	36	24	257	130	68
4	380	236	6818	2446	994
5	2300	1400	72354	21146	7604
6	9945	6009	462979	117971	39619
7	34216	20608	2142595	494732	159320
8	99696	59752	7907396	1695036	531012
9	255960	153792	24684612	4992492	1534488
10	594825	357225	67731333	13072917	3963333

t	O.a3r5 O.a5r3	O.a4r4	O.r9 O.a9	O.ar8 O.a8r
2	1	1	1	1
3	40	32	513	258
4	526	418	20196	7076
5	3896	3104	282340	79430
6	20051	16003	2235465	542409
7	80192	64064	12313161	2685004
8	265356	211460	52666768	10582460
9	769152	614976	186884496	35277012
10	1984917	1587334	574304985	103008345

t	$O.a^2r^7$ $O.a^7r^2$	$O.a^3r^6$ $O.a^6r^3$	$O.a^4r^5$ $O.a^5r^4$	$O.r^{10}$ $O.a^{10}$
2	1	1	1	1
3	132	72	48	1025
4	2708	1268	836	60074
5	26300	11720	7760	1108650
6	165417	72297	48009	10874275
7	778120	337120	224224	71340451
8	2967888	1273008	851640	353815700
9	9655416	4154976	2766692	1427557524
10	27720825	11912505	7936665	4914341925

t	$O.ar^9$ $O.a^9r$	$O.a^2r^8$ $O.a^8r^2$	$O.a^3r^7$ $O.a^7r^3$
2	1	1	1
3	514	260	136
4	20710	7594	3238
5	303050	94100	37400
6	2538515	715939	276563
7	14850676	3943352	1503488
7	67518444	17200816	6479148
9	254402940	63090168	23809576
10	828707925	201375525	75832725

1	O.a4r6 O.a6r4	O.a5r5.
2	1	1
3	80	64
4	1834	1510
5	21200	17600
6	157269	130835
7	856352	713216
8	3716116	3098604
9	13596208	11320316
10	43292325	35844325

His paratis, experire, si vera sunt, quæ proponimus theoremata, sub 5. 2. exempli gratia, tertium.

O.6a2: 2t3—3t2+t.

ideſt, maſſa ex omnibus ſexcuplis abſciſſis ſecundis cuiuſq; totæ, eſt æqualis duplæ totæ tertiæ, dempta tripla tota ſecunda, addita ipſa tota.

Nota, quod interpunctio colon (:) nobis vſuuenit ad ſignificandam æqualitatem.

Eſto

Esto tota	t:	7
ideoque	$t2$:	49
	$t3$:	343
	$O.a2$:	91
	$2t3$:	686
	t:	7
	$2t3+t$:	693
	$-3t2$:	147
	$O.6a2$:	546

Item quartum $O.6ar$: $t3-t$:
idest, massa ex omnibus sexcuplis vniprimis cuiusque totæ, est æqualis totæ tertiæ, dempta ipsa tota.

Esto tota	t:	9
ideoque	$t3$:	729
	$O.ar$:	120
	$t3$:	729
	$-t$:	9
	$O.6ar$:	720

Item decimumsextum

$O.42043r3$: $3t7+7t3-10t$.

Esto

Esto tota	t:	10
ideoque	t^3:	1000
	t^7:	10000000
	$O.a_3r_3$:	71445
	$3t^7$:	30000000
	$7t^3$:	7000
	$3t^7+7t^3$:	30007000
	$-10t$:	100
	60)	30006900
	7)	500115
	Oa_3r_3:	71445

Similiter alia ſub eadem 5. 2. atque ſub alijs eiuſdem elementi propoſitionibus theoremata facile poteris probare, ope tabularum præcedentium.

Sed ne quidquam tibi deſit, accipe, pro huius capitis coronide, tabellam ſpecioſam, expenſam, vſque ad decimam baſim. Vocamus autem ſpeciem vnamquamlibet maſſam, in qua colliguntur cuiuſque totæ, omnes, eiuſdem appellationis proportionales, pro ſingulis abſciſſionibus acceptæ: & ex ſpeciebus ordinatam tabulam triangularem ſimilem tabulæ proportionalium, ſpecioſam nuncupamus.

Ta-

Tabula Speciosa.

O.u.

O.a O.r.

O.a2 O.ar O.r2.

O.a3 O.a2r O.ar2 O.r3.

O.a4 O.a3r O.a2r2 O.ar3 O.r4.

O.a5 Oa4r O.a3r2 O.a2r3 O.ar4 O.r5.

O.a6 O:a5r O.a4r2 O.a3r3 O.a2r4 O.ar5 O.r6.

O.a7 O.a6r O.a5r2 O.a4r3 O.a3r4 O.a2r5 O.ar6. O.r7.

O.a8 O.a7r O.a6r2 O.a5r3 O.a4r4 O.a3r5 O.a2r6 O.ar7 O.r8.

O.a9 O.a8r O.a7r2. O.a6r3 O.a5r4 O.a4r5 O.a3r6 O.a2r7 O.ar8 O.r9.

O.a10 O.a9r O.a8r2 O.a7r3 O.a6r4 O.a5r5 O.a4r6 O.a3r7 O.a2r8 O.ar9 O.r10.

Cap. 3.

Tertium pro tertio elemento, eſt quædam animaduerſio indeterminatarum determinabilium rationum: quarum te iam habere conceptum, facilè demonſtro; vt interim animaduertas.

Cum ſcripſero *O.a*, ſtatim ex præcedenti capite habes maſſam ex omnibus abſciſſis: ſed quota ſit hæc maſſa, nondum habes, niſi ſcripſero, cuius numeri ſit maſſa. Quod ſi aſſignauero *O.a*, numeri *t* maſſam eſſe; neque ſic habes, quota ſit, niſi ſimul aſſignauero, quotus eſt numerus, valor litteræ *t*. Neque ſi aſſignauero *O.a*, eius numeri maſſam eſſe, cuius *t2* eſt ſecunda poteſtas: neque ſi *O.a*, maſſam eius numeri dixero, cuius *t3* eſt tertia poteſtas; niſi aut litteræ *t*, aut characteris *t2*, vel *t3*, quotus valor ſit, certò certiùs aſſignauero. Similiter cum ſcripſero *O.r*, habes maſſam ex omnibus reſiduis: ſed quantitatem eius non habes. Cum verò licentiam dedero, vt quotum quemque litteræ *t* valorem taxes; tuque huiuſmodi vſus licentia dixeris, *t* valere quinario: ſtatim profectò aſſignabis & *O.a*, valere 10; & *t2*, valere 25; & *t3*, valere 125; & *O.r*, valere 10; & determinatæ litteræ *t*, determinatas eſſe quantitates *O.a*, *O.r*, *t2*, *t3*. Quare data licentia antequam vſus fueris, habebas profectò *O.a*, *O.r*, *t2*, *t3*, quantitates indeterminatas determinabiles.

Rurſum cum ſcripſero duas eiuſdem numeri Maſſas *O.a*, & *O.r*, eſſe æquales; aut maſſam *O.a*, ad *t2*---*t* dimidiã eſſe; neque tamen aſſignauero, quotus litteræ *t* ſit va-

lor; dederimque assignandi licentiam: antequam vtaris licentia, profectò habes determinatam esse rationem dimidiam, indeterminatæ quantitatis $O.a$, ad indeterminatam quantitatem $t2$---t. Quæ quidem theoremata interim mihi credis ante demonstrationem, ex inductione exemplorum; atque ita ex determinatione: sed cum in secundo elemento demõstrauero; tunc citra omnem inductionem, & ante determinationem valoris litteræ t, indubitanter vtraque asseuerabis. Habes ergo inter indeterminatas quantitates, determinatas rationes.

Sed si quæsiero, quænam sit ratio Massæ $O.a$, cuiuspiam numeri t, ad $t2$; aut Massæ $O.2a$, ad $t2$; aut Massæ $O.a$, ad t; aut massæ $O.a$, ad $t3$: ad has profectò interrogationes, data licentia vsus, cum taxaueris litteræ t valorem, tunc determinatam assignabis rationem; sed non eamdem semper, ad eamdem quæstionem. Siquidem litteram t, taxaueris valere 3; pro ratione $O.a$, ad $t2$, respondebis, 3 ad 9: qui si taxaueris litteram t valere 4; ad eamdem quæstionem respondebis 6 ad 16: quæ non est eadem ratio 3 ad 9. item pro alijs valoribus, aliam respondebis rationem. Itaque data licentia taxandi litteram t, antequam taxaueris, habes rationem $O.a$ ad $t2$ indeterminatam determinabilem.

Interim notandum est, possibiles responsiones ad quæstionem propositam, pro varijs litteræ t valoribus, ordinatim semper maioribus; varias, & semper ordinatim maiores esse: dimidia quidem ratione semper minores; ad

ipsam

ipſam verò dimidiam ſemper propiùs accedentes.

Pro litteræ t valore	$O.a$	ad $t2$
2	1	4
3	3	9
4	6	16
5	10	25
6	15	36
7	21	49
8	28	64
9	36	81
10	45	100

Quod ſi propoſitæ quæſtioni potuerit, pro quodam valore aſſignabili reſponderi ratio propior dimidiæ, quàm alia quælibet; dicetur ipſa indeterminata ratio $O.a$ ad $t2$, quaſi dimidia.

Similiter $O.2a$ ad $t2$, ratio eſt indeterminata determinabilis. nam

Pro litteræ t valore	$O.2a$	ad $t2$
2	2	4
3	6	9
4	12	16
5	20	25
6	30	36
7	42	49

Pro litteræ *t* valore	*O.2a*	ad *t2*
8	56	64
9	72	81
10	90	100

atque ita ſemper minoris inæqualitatis eſt ratio: ſed eò ſemper maior, quò pro maiore litteræ *t* valore, aſſignatur. Quæ ratio indeterminata determinabilis; ſi fuerit aſſignabilis propior æqualitati, quàm data quælibet inæqualitas; dicetur ratio *O.2a* ad *t2*, quaſi æqualitas.

Item pro litteræ *t* valore	*O.a*	ad *t*
2	1	2
3	3	3
4	6	4
5	10	5
6	15	6
7	21	7
8	28	8
9	36	9
10	45	10

eſt ratio indeterminata determinabilis, pro maiore litteræ *t* valore, ſemper maior, quæ ſi fuerit aſſignabilis maior, quàm data quælibet; dicetur ratio *O.a* ad *t*, quaſi infinita.

De-

Denique pro litteræ *t* valore	*O.a* ad *t3*	
2	1	8
3	3	27
4	6	64
5	10	125
6	15	216
7	21	343
8	28	512
9	36	729
10	45	1000

eſt indeterminata determinabilis, pro maiore litteræ *t* valore, ſemper minor: quæ ſi fuerit aſſignabilis minor, quàm data quælibet; dicetur ratio *O.a* ad *t3*, quaſi nulla.

Cap. 4.

Quartum, pro quarto elemento, eſt animaduerſio *def.* 10. *lib.* 5. *Elem. Eucl.* & *def.* 5. *lib.* 6. in quibus modus quantitatis rationum aſſumitur; illi quidem ſuperinductus, ſecundum quæm maiores, vel minores rationes dicuntur, *def.* 8. *lib.* 5. ſed ab illo longè alius; & ſecundum quem propiores æqualitati, aut remotiores ab æqualitate rationes dicimus.

Modum autem quantitatis, in vnoquoque genere, concipimus ex duobus. vno: ſecundum quod res eiuſdem generis inuicem ſunt componibiles, vt faciant eiuſdem generis

generis

neris aliam rem, in eiusdem modi comparatione grandiorem. altero; secundum quod res eadem, secum ipsa altera, composita aliquoties, facit rem eiusdem generis, in eiusdem modi comparatione, æquètoties grandiorem. Sic calor calori adpositus, facit calidum calidius: & calor simul aliquoties iteratus, facit æquèmultoties calidius calidium. item lumen lumini adpositum, facit luminosius luminosum: idemque lumen simul aliquoties iteratum, facit æquemultoties luminosius luminosum.

Similiter ratio inæqualitatis maioris, alij maioris inæqualitatis rationi adposita, componit rationem maioris inæqualitatis, & magis maioris inęqualitatis, ideſt magis ab æqualitate remotæ, *ex def.* 5.6. Et ratio maioris inæqualitatis, secum ipsa altera, aliquoties composita, facit rationem multò maioris inæqualitatis æquemultiplicatam, ideſt æquemultò remotiorem ab æqualitate, *ex def.* 10.5. Quare maioris inæqualitatis rationibus, conuenit modus quantitatis secundum quem magis vel minùs maioris sunt inæqualitatis, ideſt, magis, vel minùs ab æqualitate distantes.

Eodemque modo, ratio minoris inæqualitatis, alij minoris inæqualitatis rationi adposita facit rationem minoris inæqualitatis, & magis minoris inæqualitatis, ideſt remotioris ab æqualitate *ex def.* 5.6. Et ratio minoris inæqualitatis, secum ipsa altera, aliquoties composita, facit rationem multò minoris inæqualitatis ęquemultiplicatam, ideſt æquemultò remotioris ab æqualitate, *ex def.* 10.5.

Quare

Quare minoris inæqualitatis rationibus, conuenit modus quantitatis, secundum quem magis, vel minùs minoris sunt inæqualitatis, idest secundum quem magis, vel minùs ab æqualitate distant.

Porrò quantum ad hunc modum attinet quantitatis, notandum est, rationum quasi tria genera esse. Primum æqualitatis, cui talis modus non conuenit, neque seorsim ipsi, neque sibi & alijs, tamquam vnius generis rationibus: nam æqualitas æqualitati adposita, eamdem componit æqualitatem; & maioris inæqualitatis, vel minoris inæqualitatis rationi adposita, eamdem inæqualitatis facit rationem. Secundum, maioris inęqualitatis. Tertium, minoris inæqualitatis; quibus tales modos conuenire singulis demonstrauimus: sed non vtrisque, vt vni generi. nam maioris inæqualitatis, & minoris inæqualitatis rationes adpositæ, nec magis maioris, nec magis minoris inæqualitatis componunt rationes.

Cap. 5.

Quintum pro quinto elemento est inquisitio quantitatis quæ cuiusque rationis non ex hypotheli est propria, sed naturaliter, & citra omnem hypothesim: altioris rationis, maior; depressioris, minor; æquealtæ, eadem; multiplicatæ, æquemultiplex; & submultiplicatæ, æquesubmultiplex: quam logarithmnm vocamus; & nos in quinto elemento, diligenter; quantùm potuimus, persecuti, non hucusque quidem attigimus, tamen viam inueniendi aperuimus. Id quod primùm in ratione dupla, ita conabor explicare.

Accipe

Accipe feriem infinitam omnium fractionum, in quibus vnitas, & omnes numeri denominant vnitatem: quarum in characteribus, cum confueuerit numerator, fcribi fupra denominatorem interueniente lineola, fic

$\frac{1}{1}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{11}$ $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{13}$ $\frac{1}{14}$ $\frac{1}{15}$ $\frac{1}{16}$ &c.

nos aliter. fcripfimus enim primùm numeratorem, deinde ftatim adfcripfimus denominatorem inter parenthefes claufum: quod compofitioni typographycæ longè commodius cum fit, lectioni etiam tum in latino fermone, tum in noftro Italico idiomate, magis conuenit.

1(1), 1(2), 1(3), 1(4), 1(5), 1(6), 1(7), 1(8), 1(9), 1(10), 1(11), 1(12), 1(13), 1(14), 1(15), 1(16), &c.

Et in accepta ferie fume terminos, duplam habentes rationem, fimplos, dimidios, fubtriplos, fubquadruplos, aliofque fubmultiplos deinceps. Et inter extremos, accipe in eadem ferie medios quofque, quorum & maioris extremi fumma dicetur hyperlogarithmus, eo quod fuperet logarithmum; eorumdem verò mediorum, & minoris extremi fumma, dicetur hypologarithmus; eo quod fuperetur à logarithmo.

Itaque duplæ rationis hyperlogarithmi funt, qui fequuntur: primus inter fimplos & maximos; & reliqui deinceps ordinatim inter minores, & fubmultiplos.

1(1).

1(1).
1(2) 1(3).
1(3) 1(4) 1(5).
1(4) 1(5) 1(6) 1(7).
1(5) 1(6) 1(7) 1(8) 1(9).

& reliqui in infinitum: quorum inter ſimplo hyperlogarithmus eſt maximus, & reliqui deinceps ordinatim minores.

Item duplæ rationis hypologarithmi ſunt qui ſequuntur primus inter ſimplos, & maximos, & deinceps reliqui

1(2).
1(3) 1(4).
1(4) 1(5) 1(6).
1(5) 1(6) 1(7) 1(8).
1(6) 1(7) 1(8) 1(9) 1(10).

& in infinitum: quorum inter ſimplos hypologarithmus eſt minimus, & reliqui deinceps ordinatim ſunt maiores.

Eſt autem aſſignatorum quotcunque minimus hyperlogarithmorum, maior quàm maximus hypologarithmorum: & differentia æqualis minimo aſſumptorum extremorum rationis duplæ. cum autem poſſit aſſumi minor extremus, quàm data quælibet quantitas; poſſunt conſequenter aſſumi termini duplam inter ſe rationem habentes, quorum hyperlogarithmi, & hypologarithmi differentia minor, quam data quælibet quantitas. vnde hyperlogarithmus, & hypologarithmus, quaſi ſunt æquales.

Porrò logarithmus illa eſt quantitas, ad quam tendunt

hyperlogarithmi, cum ſemper deinceps minuuntur, & ad quam tendunt hypologarithmi, cum ſemper deinceps augentur; omni minor hyperlogarithmo, & omni maior hypologarithmo.

Similiter, ſeſquialteræ rationis hyperlogarithmi & hypologarithmi ſunt, qui ſequuntur: & vtrorumque primus eſt inter ſimplos, & maximos; reliqui verò deinceps ordinatim inter minores, & ſubmultiplos.

Hyperlogarithmi.

1(2).
1(4) 1(5).
1(6) 1(7) 1(8).
1(8) 1(9) 1(10) 1(11).
1(10) 1(11) 1(12) 1(13) 1(14).
& deinceps alij in infinitum.

Hypologarithmi.

1(3).
1(5) 1(6).
1(7) 1(8) 1(9).
1(9) 1(10) 1(11) 1(12).
1(11) 1(12) 1(13) 1(14) 1(15).
& reliqui deinceps in infinitum.

Similiter alius cuiuſque rationis hyperlogarithmi, & hypologarithmi ſunt aſſignabiles, quorum omnium quantitas intermedia eiuſdem rationis eſt logarithmus. Et hæc eſt ſuæ cuiuſque rationis quantitas naturalis, & earumdem, vel æquealtarum rationum eadem quantitas, ſecundum

altitu-

altitudinis & depressionis modum in præcedenti capite fusiùs declaratum.

Deinde altiorum rationum sunt maiores logarithmi, & depressiorum minores. quod ideò patet, quia altioris hyperlogarithmi rationis, hyperlogarithmos continent depressioris: & hypologarithmi continent hypologarithmos.

Nam exempli gratia hyperlogarithmi sunt rationum

triplæ	& sesquialteræ
1(1) 1(2).	1(2).
1(2) 1(3) 1(4) 1(5).	1(4) 1(5).
1(3) 1(4) 1(5) 1(6) 1(7) 1(8).	1(6) 1(7) 1(8).

quorum triplæ altioris hyperlogarithmi continent sesquialteræ depressionis hyperlogarithmos.

Item hypologarithmi sunt earumdem rationum

triplæ	& sesquialteræ
1(2) 1(3).	1(3).
1(3) 1(4) 1(5) 1(6).	1(5) 1(6).
1(4) 1(5) 1(6) 1(7) 1(8) 1(9).	1(7) 1(8) 1(9).

quorum hypologarithmi triplæ continent hypologarithmos sesquialteræ.

Vnde patet etiam, quod compositæ rationis logarithmus, est aggregatus componentium logarithmorum: nam & hyperlogarithmi duplæ, & sesquialteræ, hyperlogarithmos triplæ componunt; & hypologarithmi, hypologarithmos.

Hyperlogarithmi.

Duplæ	Sesquialteræ.
1(1).	1(2).
1(2) 1(3).	1(4) 1(5).
1(3) 1(4) 1(5).	1(6) 1(7) 1(8).
1(4) 1(5) 1(6) 1(7).	1(8) 1(9) 1(10) 1(11).

Hypologarithmi.

Duplæ	Sesquialteræ.
1(2).	1(3).
1(3) 1(4).	1(5) 1(6).
1(4) 1(5) 1(6).	1(7) 1(8) 1(9).
1(5) 1(6) 1(7) 1(8).	1(9) 1(10) 1(11) 1(12).

Sed & duplicatæ rationis duplus est logarithmus: nam duplicatæ duplæ rationis, nempe quadruplæ hyperlogarithmi ex binis duplæ rationis hyperlogarithmis aggregatis fiunt.

Hyperlogarithmi quadruplæ

ex duplæ,	& duplæ hyperlogarithmis.
1(1).	1(2) 1(3).
1(2) 1(3).	1(4) 1(5) 1(6) 1(7).
1(3) 1(4) 1(5).	1(6) 1(7) 1(8) 1(9) 1(10) 1(11).

Hypologarithmi quadruplæ

ex duplæ,	& duplæ hypologarithmis.
1(2).	1(3) 1(4).
1(3) 1(4).	1(5) 1(6) 1(7) 1(8).
1(4) 1(5) 1(6).	1(7) 1(8) 1(9) 1(10) 1(11) 1(12).

Si-

Similiter multiplicatæ cuiusque rationis æquemultiplex deprehenditur logarithmus; quia quasi æquemultipli sunt hyperlogarithmi, & quasi æquemultipli sunt hypologarithmi. Et è conuerso submultiplicatæ deprehenditur submultiplex logarithmus.

APPENDIX.

CVm hæc scriberem, mihi contigit rectum tramitem inuenire, ad persequendos omnium numerosarum rationum logarithmos. Oportet autem eiusdem ab initio propositæ seriei fractionum terminos assumere, aliquotenos à primo, singulos, binos, ternos, quaternos, quinos, & deinceps. Porrò ex totenis collectas quantitates voco prologarithmos, & totenorum seriem, voco seriem prologarithmorum.

Esto autem series singulorum *A*: series prologarithmorum ex binis *B*: series prologarithmorum ex ternis *C*: item ex quaternis *D*: item ex quinis *E*: & deinceps aliæ. Deinde series ordinetur excessuum, primi prologarithmi seriei *B*, supra primum seriei *A*; & secundi, supra secundum; & tertij, supra tertium; & sic deinceps in infinitum: omnium huiusmodi excessuum summa, est logarithmus rationis duplæ. Nam primus excessus, est hypologarithmus inter maximos terminos rationis duplæ: summa ex primo & secundo, est hypologarithmus, inter subduplos maximorum: summa ex primo secundo & tertio, est hy-

E	1(1 (1(2) 1(3) 1(4) 1(5).	1(6) 1(7) 1(8) 1(9) 1(10).	1(11) 1(12) 1(13) 1(14) 1(15).
D	1(1) 1(2) 1(3) 1(4).	1(5) 1(6) 1(7) 1(8).	1(9) 1(10) 1(11) 1(12).
C	1(1) 1(2) 1(3).	1(4) 1(5) 1(6).	1(7) 1(8) 1(9).
B	1(1) 1(2).	1(3) 1(4).	1(5) 1(6).
A	1(1).	1(2).	1(3).

pologarithmus, iuter ſubtriplos maximorum. Ergo ſumma omnium, hypologarithmorum eſt max mus, nempe logarithmus.

Item ſeries ordinetur exceſſuum primi prologarithmi ſeriei *C*; ſupra primum ſeriei *B*; & ſecundi, ſupra ſecundum; & tertij, ſupra tertium; & ſic deinceps in infinitum: omnium huiuſmodi exceſſuum ſumma, eſt logarithmus rationis ſeſquialteræ.

Item ſeries ordinetur exceſſuum primi prologarithmi ſeriei *D*, ſupra primum ſeriei *C*; & ſecundi, ſupra ſecundum; & tertij ſupra tertium; & ſic deinceps in infinitum: omnium ſumma exceſſuum, eſt logarithmus rationis ſeſquitertiæ.

Similiter ſeries ordinetur exceſſuum primi prologarithmi ſeriei *E*, ſupra primum ſeriei *C*; & ſecundi, ſupra ſecundum; & tertij, ſupra tertium; & ſic deinceps in infinitum: omnium ſumma exceſſuum, eſt logarithmus rationis quam habent numeri ex quotenis eſt ſeries *E*, & ex quotenis eſt ſeries *C*. Nam primus exceſſus, inter maximos eiuſdem rationis terminos eſt hypolo-

gari-

garithmus: primi vero & secundi excessuum summa, est hypologarithmus inter subduplos maximorum: primi secundi & tertij summa excessuum, est hypologarithmus inter subtriplos; & sic deinceps.

Cap. 6.

Sextum & vltimum, pro sexto est elemento: numerosa duarum propositionum quinti elementi reductio, quarum est vsus insignis in sexto.

Prima, quæ est 99. 5.

Quatuor hormonicè dispositarum quantitatum, si prima maxima est omnium, logarithmus, rationis primæ ad secundam, ad logarithmum rationis tertię ad quartam, minor est, quàm vt prima ad tertiam; maior, quàm vt secunda ad quartam.

Sint quantitates numerosas inuicem rationes habentes, harmonicè dispositæ 1(4) 1(5) 1(8) 1(9) quarum maxima 1 4).

Dico logarithmum rationis 1(4) ad 1(5) ad logarithmum rationis 1(8) ad 1(9), minorem esse, quàm vt 1(4) ad 1(8); maiorem verò, quàm vt 1(5) ad 1 9). ideſt

Dico logarithmum rationis 5 ad 4 ad logarithmum rationis 9 ad 8, minorem esse, quàm vt 8 ad 4; maiorem verò, quàm vt 9 ad 5. ideſt

Dico rationem 5 ad 4, ad rationem 9 ad 8, logarithmicè minorem esse, quàm vt 8 ad 4; maiorem verò logarithmicè, quàm vt 9 ad 5. ideſt

Dico rationem 5 ad 4 quadruplicatam, depressiorem esse

esse ratione 9 ad 8 octuplicata: & 5 ad 4 quintuplicatam altiorem esse ratione 9 ad 8 nonuplicata.

Et quia ambæ rationes 5 ad 4, & 9 ad 8, sunt maioris inæqualitatis: inter quas depressiores altioribus sunt minores. Dico 5 ad 4 quadruplicatam minorem esse ratione 9 ad 8 octuplicata: & 5 ad 4 quintuplicatam, maiorem esse ratione 9 ad 8 nonuplicata. idest

Dico potestates quartam 5 ad quartam 4, minorem esse quam vt octaua 9 ad octauam 8: quintam verò 5 ad quintam 4, maiorem quam vt nona 9 ad nonam 8. idest

Dico productos sub potestatibus, sub quarta 5, & octaua 8, minorem, quàm sub quarta 4, & octaua 9: sed sub quinta 5, & nona 8, maiorem, quàm sub quinta 4, & nona 9.

Potestates.

Quarta	5	625
Octaua	8	16777216
		83886080
		33554432
		100662296
		10485659900

Quar-

Quarta 4 256

Octaua 9 43046721

258280326

215233605

86093442

11019960576

Quinta 5 3125

Nona 8 134217728

671088640

268435456

134217728

402653184

419430400000

Quinta 4 1024

Nona 9 387420489

1549681956

774840978

387420489

396718580736

Secunda, quæ est 100. 5.

Quatuor arithmeticè dispositorum numerorum, ratio primi ad secundum totuplicata, quotus est primus, maior est ratione tertij ad quartum totuplicata, quotus est quartus: ratio verò primi ad secundum totuplicata, quotus est secundus, minor est, quàm tertij ad quartum totuplicata, quotus est tertius.

Sint quatuor arithmeticè dispositi numeri 8, 5, 7, 4. Dico rationem 8 ad 5 octuplicatam, maiorem esse ratione 7 ad 4 quadruplicata: & rationem 8 ad 5 quintuplicatam, minorem septuplicata 7 ad 4. idest

Dico potestates octauam 8 ad octauam 5, maiorem esse, quàm quarta 7 ad quartam 4: quintam 8 ad quintam 5, minorem, quàm septima 7 ad septimam 4. idest

Dico productos sub potestatibus, sub octaua 8, & quarta 4, maiorem esse, quàm sub octaua 5, & quarta 7: & sub quinta 8, & septima 4, minorem, quàm sub quinta 5, & septima 7.

		Potestates.
Octaua	8	16777216
Quarta	4	256
		100663296
		83886080
		33554432
		4294967296

Octaua	5	390625
Quarta	7	2401
		390625
		1562500
		781250
		937890625
Quinta	8	32768
Septima	4	16384
		131072
		262144
		98304
		196608
		32768
		536870912

Poteſtates.

Quinta	5	3125
Septima	7	823543
		4117715
		1647086
		823543
		2470629
		2573571875.

			Errata.	*Corrige.*
In Præfatione præcedenti.				
Pag.	*lin.*	*col.*		
52	7	1	164025	273375
	8	1	9216	27648
	9	1	49	343

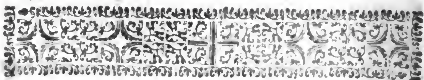
In Opere sequenti.

Pag.	*lin.*		
5	20	basibus, quæ	basibus, quælibet quantitas fuerit summa duarum, quæ
64	25	quoties	quotus
	26	quoties	quotus
207	27	supra lineolam	ante parentheses
208	3	infra lineolam	inter parentheses.



SOLI DEO GLORIA.

GEOMETRIÆ SPECIOSÆ ELEMENTA.



Petrus Mengolus, Lucæ Tesino, adoleſcenti optimo S. D.





N prima lectione Algebræ Specioſæ, tres tabulas triangulares tibi tradidi, multiplicium, & proportionalium, & nominum nuncupatas: earumque vſum, ad componendas, & relinquendas poteſtates binomiorum, & per modum artis, explicaui. Eius demonſtrationem, præſenti trado libello; quam ex me audiſti: vt legendo recolas; & ad potiora mathemata ſuſcipienda, te prapares. Nihil alienum ſumo; præter quadam, ex Euclide, in quinto, & ſexto: quæ ſuis locis allego, in margine. Vale.



GEO-

GEOMETRIÆ SPECIOSÆ

ELEMENTVM PRIMVM

DEFINITIONES.

1 SI tabula triangularis, ex vertice, & basibus, & lateribus, ita concipiatur ordinata; vt in vertice sit quædam quantitas; & in prima basi, statim sub vertice, sint duæ quantitates; & in secunda basi, tres; & in tertia, quatuor; & sic deinceps: in singulis basibus, dicentur, quantitates extremæ, Prima, & Vltima; & his proximæ, Secunda, & Penultima; item Tertia, & Tritultima; Quarta, & Quartultima; & deinceps.

2. Vnde latus primarum omnium quantitatum, dicetur, Primum; & secundarum, Secundum; & deinceps: vltimarum quoque dicetur, Vltimum; & penultimarum, Penultimum; & sic deinceps.

3. In singulis quoque lateribus, quantitas, quæ in vertice, aut quæ vertici est proxima, dicetur Prima; & reliquæ

deinceps, Secunda, Tertia, Quarta, & ſic in infinitum.

4. Quantitas, vnde progreſſio continuè proportionalium, ordinatur in infinitum, dicetur, Rationalis. & ſignificabitur, charactere *u*.

5. Et prima conſequens à rationali, dicetur, Radix, vel Poteſtas prima. & ſignificabitur, charactere cuiuſq; litteræ alphabeti.

6. Et reliquæ conſequentes, dicentur Poteſtates radicis, Secunda, Tertia, & deinceps, iuxta ſuum cuiuſque ordinem. Et ſignificabitur vnaquæque, eâdem litterâ ſuæ radicis, adſcriptoque ordinis numero. vt radicis *a*, ſecunda poteſtas *a*2, tertia *a*3, & ſic deinceps.

7. Rationalis, licet nomen ordinis non habeat inter poteſtates; tamen habebitur pro ordinata: & dicetur, vnitate minùs ordinata, quàm ſit prima poteſtas.

8. Si tabulæ triangularis in vertice, fuerit rationalis; & in prima baſi, duæ fuerint radices, prior, in primo latere, & poſterior, in vltimo; & deinceps in primo latere, fuerint ordinatæ poteſtates prioris radicis, & in vltimo, poteſtates poſterioris: fuerint autem, & in reliquis lateribus ſecundo, tertio, & deinceps in ſingulis, ordinatæ continuè proportionales, in eadem ratione primi lateris; item in penultimo, tritultimo, & reliquis deinceps lateribus, in ſingulis, ordinatæ fuerint continuè proportionales, in eadem ratione vltimi lateris: & in ſingulis baſibus, fuerint ordinatæ continuè proportionales, in eadem ratione radicum; in ſecunda baſi, tres, quarum extremæ ſunt ſecundæ pote-

ſtates

ſtates radicum; in tertia, quatuor, quarum extremæ ſunt poteſtates tertiæ, & ſic deinceps: dicetur Tabula Proportionalium. *Huiuſmodi tabulam ordinat Euclides in 2. 8. Elementorum.*

9. In tabula proportionalium, inter extremas, vna quęlibet media, ad quam rationalis habuerit rationem compoſitam ex duabus rationibus, ad quaſdã poteſtates vtrarumque radicum; denominabitur ab vtriſque ordinibus poteſtatum, à priore primùm, deinde à poſteriore. & ſignificabitur, ex vtriſq; characteribus, charactere compoſito; ex priore primùm, deinde ex poſteriore. Vt ſi prior eſt radix *a*, poſterior *r*; media, ad quam *u*, rationem habet compoſitam, ex rationibus, *u* ad *a*, & *u* ad *r*, dicetur, Vni prima; & ſignificabitur, charactere *ar*: ad quam verò *u*, rationem habet compoſitam ex rationibus, *u* ad *a2*, & *u* ad *r3*, dicetur, Bitertia; & ſignificabitur charactere *a2r3*: & ſic deinceps.

10. Si tabulæ triangularis in vertice, fuerit vnitas; & in prima baſi, & in lateribus primo, & vltimo, fuerint vnitates; deinceps verò in baſibus, quæ verſus verticem ſibi inſiſtũt, quaſi fronti cornua, dicetur, Tabula multiplicium.

11. Si duæ tabulæ, multiplicium, & proportionalium, ita coaptentur, vertex, vertici, & latera, lateribus, & baſes, baſibus, vt congruant; ideſt, vt quiſque numerus multiplex, congruentem multiplicet proportionalem: producta, dicetur, Tabula Nominum. Significabitur autem vnumquodq; nomen, eodem ſuæ proportionalis chara-

ctere,

ctere, post suum immediatè numerum conscripto.

12. In quibusque proportionalitatibus earumdem, vel non earumdem rationum; homologæ sunt primùm, antecedentes, antecedentibus, & consequentes, consequentibus: deinde permutando, antecedentes suis consequentibus sunt homologæ: homologarum quoque æquemultiplices, & eædem partes, & summæ, & differentiæ, sunt homologæ.

13. Homologia, est sumptio homologarum, vt & in alia quadam proportionalitate, fiant homologæ.

14. Ratio ex æquali, dicetur, quælibet ratio, ex rationibus composita.



Tabula Proportionalium.

u
a r
a2 ar r2
a3 a2r ar2 r3
a4 a3r a2r2 ar3 r4
a5 a4r a3r2 a2r3 ar4 r5
a6 a5r a4r2 a3r3 a2r4 ar5 r6

Tabula Multiplicium.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

Tabula Nominum.

u
a r
a2 2ar r2
a3 3a2r 3ar2 r3
a4 4a3r 6a2r2 4ar3 r4
a5 5a4r 10a3r2 10a2r3 5ar4 r5
a6 6a5r 15a4r2 20a3r3 15a2r4 6ar5 r6

Ex-

Explicationes quarumdam notarum.

Additio significabitur, charactere crucis: vt ex a, & r, collecta summa, $a + r$.

Subtractio, charactere lineolæ: vt ex t, dempta a, relinquit differentiam, $t - a$.

Æqualitas, ea interpunctione significabitur, qua partes principes periodi solent distingui. vt quod $a + r$, est æqualis ipsi t,

$$a + r : t.$$

Ratio significabitur interpunctione, qua maximæ partes periodi subdistinguuntur; scilicet puncto, & commate. vt ratio a ad r, scribendo,

$$a ; r.$$

Itaque proportio a ad r, sicut $a2$ ad ar, significabitur, scribendo,

$$a ; r : a2 ; ar.$$

Et composita ratio ex rationibus. velut ex u ad $a2$, & u ad $r3$, composita u ad $a2r3$, scribendo,

$$u ; a2 , + u ; r3 : u ; a2r3.$$

vbi comma, inter $a2$, & crucem, vtiliter distinguit, ad significandum, non quantitatum $a2$, & u, summam $a2 + u$, sed rationum.

Multiplicata quoque ratio, significabitur. velut $a3$ ad $r3$, triplicata rationis a ad r, scribendo,

$$a3 ; r3 : \text{triplicata } a ; r.$$

Theo-

Theorema primum, Propositio prima.

EX ijſdem rationibus, ex æquali, ſunt eædem rationes.

Hypotheſis.

$a; b : c; d.$

$e; f : g; h.$

Dico ex æquali $a; b, + e; f : c; d, + g; h.$

Præparatio.

$e; f : b; i.$

$g; h : d; l.$

Demonſtratio.

11.5. | $b; i : d; l$
12.5. | $a; i : c; l$
def.5.6. | $a; b, + e; f : a; i.$
def.5.6. | $c; d, + g; h : c; l.$
11.5. | $a; b, + e; f : c; d, + g; h.$ Quod erat demonſtrandum.

Quare ex ijſdem rationibus, ex æquali, ſunt eædem rationes.

Theor. 2. Prop. 2.

QVantitates proportionales, per homologiam ſunt proportionales.

Demonſtr.

def. 6.5. 12,& 24.5. 15.5 16.5 17.5 18.5 | Nam conuertendo, quantitates fiunt proportionales: item homologas homologis addendo: item æque multiplicando, & æquepartiendo: & permutando: & diuidendo: & com-

19.5 ponendo: & homologas ab homologis aufe-
22.5 rendo; & per conuerſionẽ rationis: & ex æquali in proportione ordinata: coniunctiſq; omnifariam huiuſmodi argumentis, quocunque ordine, per homologiam, proportionales fiunt. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 3. Prop. 3.

POteſtates æqueordinatæ totuplicatam habent rationem radicum, quotus eſt ordo.

Hypoth.

Sint radices, *a*, *r*: quarum poteſtates æqueordinatæ, *a*3, *r*3: numerus ordinis, 3.

Dico *a*3 ; *r*3: triplicatam *a*; *r*.

Demonſtrat.

def. 6. *a*3 ; *u*: triplicata *a*; *u*.
def. 6. *u*; *r*3 : triplicata *u*; *r*.
p. h. *a*3 ; *r*3 : triplicata *a*; *r*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 4. Prop.

SI tabulæ triangularis in vertice fuerit rationalis; & in prima baſi, fuerint duæ radices; & in primo, & vltimo latere, fuerint continuè proportionales; & in ſingulis baſibus, ordinatæ fuerint continuè proportionales: erit proportionalium tabula.

De-

Demonstr.

Cum enim in prima basi sint radices: erunt in
def. 6. secunda basi extremæ, secundæ potestates; dupli-
3. h. catam habentes rationem radicum: quę & dupli-
def. 9. catam habent rationem deinceps: ergo ratio ra-
11. 5. dicum eadem est, quæ deinceps. Eodemque modo, in singulis basibus, ostendetur, quod ratio radicum eadem est, quæ deinceps. Quare vt in prima basi, ita in secunda, & reliquis, eadem semper est ratio primę quantitatis ad secundam, & secundæ ad tertiã, & sic deinceps; item penultimæ ad vltimam, & tritultimæ ad penultimã, & sic deinceps. Itaque in binis deinceps lateribus, & in binis deinceps basibus, quantitates eamdem habent rationẽ radicum, antecedentes, in vno, & consequentes, in
16. 5. altero latere: ergo permutando, eamdem habent rationẽ, antecedentes, in vna, & consequentes, in altera basi: & vt in primo latere sunt continuè proportionales, vt rationalis ad priorem radicem; ita in secundo, & in tertio, & in reliquis deinceps, in eadem sunt ratione continuè proportionales: & vt in vltimo, sunt continuè proportionales, vt rationalis ad posteriorem radicem; ita in penultimo,
def. 8. & tritultimo, & in reliquis deinceps. Quare tabula triangularis, est tabula proportionaliũ. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 5. Prop. 5.

SI tabulæ triangularis in vertice, fuerit rationalis; & in prima basi, fuerint duæ radices; & in primo, & vltimo latere, fuerint continuè proportionales; & in singulis lateribus à primo, fuerint ordinatæ continuè proportionales, in eadem ratione, quæ deinceps, in primo: erit proportionalium tabula. Item si in singulis lateribus ab vltimo, fuerint ordinatæ continuè proportionales, in eadem ratione, quæ deinceps, in vltimo: erit proportionalium tabula.

Demonstr.

Cum in binis deinceps basibus, & in binis deinceps lateribus à primo, quantitates eandem habeant rationem, quæ deinceps, in primo, antecedentes, in vna, & consequentes, in altera basi: habebunt, permutando, eamdem rationem etiam,
16. 5. antecedentes, in vno, & consequentes, in altero latere: eritque in basibus, ratio deinceps, eadem, quæ in prima basi: eruntque in singulis basibus, continuè proportionales in eadem ratione radicum: quare tabula triangularis, erit proportionalium tabula. Quod &c.
4. h.

Simili prorsus demonstratione, ostendetur altera pars Theorematis. Quam &c.

Quare &c.

Theor.

Theor. 6. Prop. 6.

IN tabula proportionalium, rationalis ad vnamquamq; mediam, habet rationem cõpositam ex rationibus, ad potestatem, in primo latere, vnitate minùs ordinatam, quàm sit ipsa media, in basi, ab vltima; & ad potestatem, in vltimo latere, vnitate minùs ordinatam, quàm sit ipsa media, in basi, à prima.

Hypoth. & Demonst.

Sit in tabula proportionalium, quinta basis; in
def. p. qua, sex proportionales: & sit vna ex medijs, non prima, quæ est sextultima, nec sexta, quæ est vltima, sed quarta, quæ est tritultima. Et sint, in primo latere, radix *a*; & in vltimo, radix *r*: & ab *a*, sit secunda potestas *a2*, vnitate minùs ordinata,
def. 8. quàm tritultima; quæ profectò in primo latere, est
def. 3. tertia; & in tritultimo, est prima: sit etiam ab *r*, tertia potestas *r3*, vnitate minùs ordinata, quàm
def. 8. quarta; quæ profectò, in vltimo latere, est quar-
def. 3. ta; & in quarto, prima: erit quantitas *a2r3*,
def. 9. bitertia, ad quam, rationalis habet rationem compositam ex rationibus, ad potestates *a2*, & *r3*.

Dico mediam, in quinta basi, quartam tritultimam, esse bitertiam *a2r3*.

Demonstr.

def. 2. Nam quarta, & tritultima, in quarto est, & in tritultimo latere: in quarto quidem, est tertia quantitas; & in tritultimo, est quarta. Habet er-

go

go rationalis ad tertiam quarti lateris, rationem compositam ex rationibus, ad $r3$ primam quarti lateris, & primæ quarti lateris ad tertiam: sed prima quarti lateris ad secundam, & secunda ad tertiam, sunt continuè proportionales, vt prima primi lateris ad secundam, & secunda ad tertiam: ideoque prima ad tertiam quarti lateris, est vt prima u, ad tertiam primi $a2$: ergo rationalis ad tertiam quarti lateris, idest, ad quartam tritultimam, in quinta basi, rationem habet compositam ex rationibus, u ad $r3$, & u ad $a2$; eamdem, quam habet ad $a2r3$ bitertiam. Ergo in quinta basi, quarta tritultima, est bitertia $a2r3$. Quod &c.

def. 8. p. h. p. h. 9. 5.

Quare &c.

Theor. 7. Prop. 7.

QVantitas, ad quam rationalis habet rationem compositam, ex rationibus ad potestates, in primo, & vltimo latere tabulæ proportionalium; est media: & est in basi æqueordinata, atque summa est ordinum postatum: & est vnitate plus ordinata, in basi, ab vltima, quàm sit ordo potestatis, in primo latere: item est vnitate plus ordinata, in basi, à prima, quàm sit ordo potestatis, in vltimo latere.

Hypoth.

Sit quantitas $a2r3$, ad quam u, rationem habet compositam, ex rationibus, u ad $a2$, in primo latere, & u ad

ad $r3$, in vltimo, tabulæ proportionalium: quarum poteſtatum ſumma ordinum, ſit ordo quintæ baſis: & quarum poteſtatum, vnitate maiores ordines, eius quidem $a2$, quæ in primo eſt latere, ſit ordo tritultimæ, & eius $r3$, quæ in vltimo eſt latere, ſit ordo quartæ, in baſi.

Dico $a2r3$, eſſe quartam tritultimam, in quinta baſi.

Demonſtr.

Eſt enim $a2$, tertia in primo latere; & vt u ad $a2$, ita eſt, in quarto latere, prima ad tertiam:
def. 8. ſed eſt $r3$, prima in quarto latere: ergo u ad ter-
p. h.
def. 8. tiam in quarto latere, rationem habet compoſitam, ex rationibus, ad $a2$, & ad $r3$; eamdem,
9. 5. quam ad $a2r3$. Ergo $a2r3$, eſt tertia in quar-
def. 3.
def. 1. to latere: ergo eſt quarta in tritultimo: ergo in
def. p. ſua baſi, eſt quarta tritultima: ſed quarta tritultima non eſt, niſi inter ſex proportionales, quarum & ſexta eſt vltima, & quinta eſt penultima, & ſic
def. 9. deinceps: & ſex proportionales, non niſi in quinta ſunt baſi. Ergo $a2r3$ bitertia, eſt & quarta tritultima, in quinta baſi. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 8. *Prop.* 8.

SVmma cuiuſque baſis nominum in tabula, eſt poteſtas æqueordinata ſummæ radicum.

Hy-

Hypoth.

Sit in tabula nominum basis tertia, cuius summa nominum $a3 + 3a2r + 3ar2 + r3$: sit quoque summa radicum $a+r$.

Dico $a3 + 3a2r + 3ar2 + r3$, esse tertiam potestatem $a+r$.

Oportet autem priùs demonstrare, de summa nominũ, præcedentium basium, videlicet, secundæ basis.

Dico itaque primò $a2 + 2ar + r2$, secundam esse potestatem $a + r$.

Demonstr.

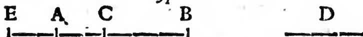
def. 8.	$u; a: a; a2: r; ar: a + r; a2 + ar.$
& 2. *h.*	$u; r: a; ar: r; r2: a + r; ar + r2.$
2. *h.*	$u; a + r: a + r; a2 + 2ar + r2.$
	$a2 + 2ar + r2$, est secunda potestas $a + r$. Quod &c.
def. 8. & 2. *h.*	$u; a: a2; a3: ar; a2r: r2; ar2: a2 + 2ar + r2; a3 + 2a2r + ar2.$
	$u; r: a2; a2r: ar; ar2: r2; r3: a2 + 2ar + r2; a2r + 2ar2 + r3.$
2. *h.*	$u; a + r: a2 + 2ar + r2; a3 + 3a2r + 3ar2 + r3.$
def. 6.	$a3 + 3a2r + 3ar2 + r3$, est tertia potestas $a + r$. Quod &c.
	Quare &c.

Theo-

Theor. 9. Prop. 9.

SI trium quantitatum, prima maior fuerit, quàm ſecunda; tertia autem maior fuerit exceſſu ipſarum: exceſſus tertiæ, ſupra exceſſum primæ,& ſecundæ; erit exceſſus ſummæ ex ſecunda, & tertia, ſupra primam.

Hypoth.



Sit prima quantitas AB,maior, quàm ſecunda BC,quarum exceſſus CA: ſitq; tertia D, maior, quàm CA.

Dico exceſſum D, ſupra CA, eſſe exceſſum ſummæ, ex D, & BC, ſupra BA.

Præpar.

Adponatur penes CB,& ipſi CA ſuperponatur quantitas CE, æqualis ipſi D.

Demonſtr.

Quoniam EA, eſt exceſſus EC ſupra CA; ideſt, exceſſus D, ſupra CA: necnon eſt exceſſus EB,ſupra BA;ideſt, ſummæ ex D, & BC, ſupra BA: per ſe patet, id quod propoſitum eſt.

Quare &c.

Theor. 10. Prop. 10.

INæqualium radicum, poteſtas maioris, vnà cum alternis nominibus eiuſdem baſis,demptis reliquis,æqueordinata relinquitur poteſtas differentiæ.

Hypoth.

Sint radices inæquales, t maior, a minor: quarum in tabula nominum, in basi tertia, potestas tertia maioris radicis $t3$, vnà cum alterno nomine $3ta2$, demptis reliquis nominibus $3t2a$, & $a3$, relinquitur quantitas $t3 - 3t2a + 3ta2 - a3$; sit autem differentia radicum $t - a$.

Dico $t3 - 3t2a + 3ta2 - a3$, potestatem tertiam esse $t - a$.

Oportet autem priùs demonstrare, in basibus præcedentibus, videlicet in secunda.

Dico itaque primò $t2 - 2ta + a2$, esse secundam potestatem $t - a$.

Demonstr.

def. 8. *& 2. h.* | $u;\ t:\ t;\ t2 :\ a;\ ta :\ t - a;\ t2 - ta.$

| $u;\ a:\ t;\ ta:\ a;\ a2 :\ t - a;\ ta - a2.$

| $t;\ a : t2;\ ta : ta;\ a2 : t2 - ta;\ ta - a2.$

ex 14.5 | ta, est maior, quàm $a2$.

| $t2 - ta$, est maior, quàm $ta - a2$.

9. *h.* | $t2 - ta$, dempta $ta - a2$, relinquitur $t2 - 2ta + a2$.

2. *h.* | $u;\ t - a : t - a;\ t2 - 2ta + a2.$

def. 6. | $t2 - 2ta + a2$ secunda est potestas $t - a$. Quod &c.

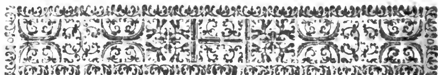
def. 8. *& 2. h.* | $u;\ t:\ t2;\ t3 : ta;\ t2a:\ a2;\ ta2 : t2 - 2ta + a2;\ t3 - 2t2a + ta2.$

| $u;\ a : t2;\ t2a: ta;\ ta2 : a2;\ a3 : t2 - 2ta + a2;\ t2a - 2ta2 + a3.$

$t;\ a:$

2. h. $t ; a : t3 - 2t2a + ta2 , t2a - 2ta2 + a3$.
ex 14.5 $t2 - 2t2a + ta2$, maior est, quàm $t2a - 2ta2 + a3$.
25. 5. $t2a + a3$, maior, quàm $2ta2$.
9. h. $t3 - 2t2a + ta2$, dempta $t2a - 2ta2 + a3$, relinquitur $t3 - 3t2a + 3ta2 - a3$.
2. h. $u ; t - a : t2 - 2ta + a2 ; t3 - 3t2a + 3ta2 - a3$.
def. 6. $t3 - 3t2a + 3ta2 - a3$, tertia est potestas $+ -$ a. Quod &c.
Quare &c.



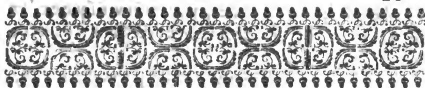


Petrus Mengolus, Adm. R. D. Iacobo Venturolo, Scholarum Piarum Primario Arithmetices Præceptori S. D.



Vos tibi primùm ostendi characteres, & numeros, libenter vidisse te significasti, & cum tua Schola profectu multiplicibus exemplis confirmasti. Immortales tibi ante omnia gratias debeo, quòd mea qualiacunque inuenta respexeris, & in tua Schola fructum conuerteris. Itaque pro redditione gratiarum, eamdem rem tibi aliquando gratam, iterum & pleniùs communico. Tu ergo libellum hunc in tuos vsus ita conuertes. Primùm per numerosam inductionem exemplorum, duo theoremata confirmabis præcedentis libelli, 8. & 10. quibus ars producendi potestates à duorum nominum aggregatis, vel relictis radicibus demonstratur. deinde singula in præsenti libello proposita. necnon alia plura, quæ tùm indico, tùm ipse tuopte poteris ingenio adijcere. Vale.

GEO-



GEOMETRIÆ SPECIOSÆ

ELEMENTVM SECVNDVM.

DEFINITIONES.



1 QVantitas vtcunque diuiſa in duas partes, dicetur, Tota, & ſignificabitur, charactere *t*.
2 Et partes Totæ, dicentur, Abſciſſa, & Reſidua: & ſignificabitur abſciſſa, charactere *a*; & reſidua, *r*.

3. Poteſtates totæ, dicentur, Tota ſecunda, *t2*; Tota tertia, *t3*; & deinceps: & poteſtates abſciſſæ dicentur, Abſciſſa ſecunda, *a2*; Abſciſſa tertia, *a3*; & deinceps: item poteſtates reſiduæ, dicentur, Reſidua ſecunda, *r2*; Reſidua tertia, *r3*; & deinceps.

4. Si quadam quantitate, diuiſa vtcunque in partes, abſciſſam, & reſiduam; concipiatur à rationali, per ipſas partes, abſciſſam primùm, deinde reſiduam, ordinata proportionalium tabula: & eadem quantitate rurſum diuiſa vtcumque; concipiatur ab eadem rationali, altera proportiona-

tionalium tabula: quantitates, quarum in vtrisque eædem appellationes, & ijdem characteres; dicentur, inuicem Synonymæ.

5. Item synonymarum æquemultiplices, dicentur, Synonymæ.

6. Ideoq; si etiam tabulæ nominum fuerint ordinatę; quantitates; quarum eadem sunt nomina, dicentur Synonimæ.

7. Vnitas ad omnes numeros, pro rationali semper habebitur. Vnde conuenienter significabatur rationalis, charactere *u*.

8. Cuiusque numeri, factis omnibus integris abscissionibus, omnium, totidemque synonymorum, summa, dicetur, Massa: & significabitur, littera maiuscula *O*, ante synonymorum characterem scripta: vt massa ex omnibus abscissis, *O. a.* & massa ex omnibus triplis biprimis, *O. 3a2r.*

9. Si cuiusque numeri, factis partibus, fuerit ordinata quædam tabula proportionalium, vel nominum; & loco cuiuslibet proportionalium, concipiatur massa suorum synonymorum; transformabitur tabula proportionalium in aliam, quæ dicetur, Tabula Speciosa.

10. In qua ordinatæ quantitates, dicentur, Species.

11. Tabula verò nominum transformabitur in aliam, quæ dicetur, Tabula Subquadratrix.

12. In qua ordinatæ quantitates, dicentur Subquadratrices.

13. Si

13. Si quælibet ſubquadratrix quantitas, multiplicata fuerit per numerum vnitate maiorem; quàm ſit ordo ſuæ baſis: producta quantitas, dicetur, Quadratrix.

14. Quod ſi, velut ex ſubquadratricibus, ita ex quadratricibus, tabula fuerit ordinata, dicetur Tabula Quadratrix.

15. Si duorum numerorum duæ ſpecioſæ tabulæ fuerint ordinatæ: maſſæ, quarum in vtriuſque ſunt eædem appellationes, & ijdem characteres, dicentur inuicem Homonymæ.

16. Item homonymarum maſſarum ęquemultiplices, dicentur, Homonymæ.

17. Ideoque etiam in duabus ſubquadratricibus tabulis, aut in duabus quadratricibus, maſſæ, dicentur, Homonymæ.

18. Si tres numeri fuerint deinceps vnitate differentes; & medius dicatur, tota: maior quidem, dicetur, Seſquitota; & ſignificabitur, charactere *q*.

19. Minor verò, Semitota: & ſignificabitur, charactere *m*.

20. Et ſicut medij numeri poteſtates dicuntur totæ, ſecunda, tertia, & deinceps: ita maioris numeri poteſtates, dicentur, Seſquitotæ; ſecunda *q2*, tertia *q3*, & deinceps.

21. Minoris autem, Semitotæ; ſecunda *m2*, tertia *m3*, & deinceps.

22. Et ſicut medij numeri dicuntur Maſſæ, Species, Subquadratrices, & Quadratrices; ita maioris numeri, dicen-

centur, Sesquimassæ, Sesquispecies, Sesquisubquadratrices, & Sesquiquadratrices.

23. Et minoris, dicentur, Semimassæ, Semispecies, Semisubquadratrices, & Semiquadratrices.

24. Item, sicut totæ incrementum, est vnitas, ad componendam sesquitotam; & decrementum, est vnitas, ad relinquendam semitotam: ita cuiuslibet totæ, dicetur, Incrementum, numerus addendus, ad componendam sesquitotam æqueordinatam.

25. Et Decrementum, subtrahendus, ad relinquẽdam semitotam æqueordinatam.

26. Item cuiuslibet massæ Incrementum, dicetur, sufficiens numerus, ad componendam homonymam sesquimassam.

27. Et Decrementum, ad relinquendam homonymam semimassam.



Tabula Speciosa.

O.u
O.a O.r
O.a2 O.ar O.r2
O.a3 O.a2r O.ar2 O.r3
O.a4 O.a3r O.a2r2 O.ar3 O.r4
O.a5 O.a4r O.a3r2 O.a2r3 O.ar4 O.r5

Tabula Subquadratrix.

O.u
O.a O.r
O.a2 O.2ar O.r2
O.a3 O.3a2r O.3ar2 O.r3
O.a4 O.4a3r O.6a2r2 O.4ar3 O.r4
O.a5 O.5a4r O.10a3r2 O.10a2r3 O.5ar4 O.r5

Tabula Quadratrix.

O.u
O.2a O.2r
O.3a2 O.6ar O.3r2
O.4a3. O.12a2r O.12ar2 O.4r3
O.5a4 O.20a3r O.30a2r2 O.20ar3 O.5r4
O.6a5 O.30a4r O.60a3r2 O.60a2r3 O.30ar4 O.6r5

Postulatum vnicum.

Postuletur, vt massam assumere concedatur homonymam, & proportionalem ad propositam quamdam, sicut numeri, aut vnitas ad inuicem.

Theor. 1. Prop. 1.

IN tabula ſpecioſa, cuiuſque numeri, & in qualibet baſi, ſpecies prima, & vltima, ſunt æquales; item ſecunda, & penultima; tertia, & triultima; & ſic deinceps: item ſeſquiſpecies; & ſemiſpecies homonymæ: & ſpecierum incrementa, & decrementa. Similiter ſubquadratrices, in ſua tabula: & quadratrices, in ſua.

Hypoth. 1.

Sint in tabula ſpecioſa, cuiuſq; numeri, & in tertia baſi, prima ſpecies *O.a3*, & vltima *Or3*.

Dico, *O.a3*, *O.r3*, eſſe æquales.

Demonſtr.

def. 8.h. Nã cuiuſq; numeri, quot ſunt abſciſſiones, tot ſunt abſciſſæ, totidemq; reſiduæ: & abſciſſæ ſunt, vnitas, binarius, & deinceps: & reſiduæ ſunt, totidem ordinati, contrario tamen ordine, ſed deinceps, vſque ad binarium, & vnitatem. Quare vnaquæq; abſciſſa, vni reſiduæ eſt æqualis: & abſciſ- *p. p.* ſa tertia, reſiduæ tertiæ; ad quas eadem rationalis, triplicatas habet eaſdem rationes: & omnes abſciſſæ tertiæ, omnibus reſiduis tertijs ſunt ęquales; ideſt, *O.a3*, *O.r3*, ſunt æquales. Quod &c.

Hypoth. 2.

Sint deinde, in eadẽ tertia baſi, ſecunda ſpecies *O.a2r*, & penultima *O.ar2*.

Dico, *O.a2r*, *O.ar2*, eſſe æquales.

De-

Demonſtr.

ſup. Singulæ *a*, ſingulis *r*, ſunt æquales: & ſingulæ *a2*, ſingulis *r2*: item ſingulæ biprimæ *a2r*, ſingulis vniſecundis *ar2*, ſunt æquales;
p. p. ad quas *u*, rationes habet compoſitas ex ijſdem rationibus: quare omnes biprimæ *O. a2r*, omnibus vniſecundis *O.ar2*, ſunt æquales. Quod &c.

Hypoth. 3.

Sint ſeſquiſpecies *O.a2r*, *O.ar2*: vel ſint ſemiſpecies. Dico, *O.a2r*, *O.ar2*, eſſe æquales.

Demonſtratio.

def. 22. b. Quæ ſunt vnius cuiuſquam numeri ſeſquiſpecies; ſunt alius, vnitate maioris numeri ſpecies:
ſup. ſed ſpecies *O.a2r*, *O.ar2*, ſunt æquales: ergo ſeſquiſpecies *O.a2r*, *O.ar2*, ſunt æquales. Quod &c.

def. 23. b. Item quæ ſunt vnius cuiuſquam numeri ſemiſpecies; ſunt alius, vnitate minoris numeri
ſup. ſpecies: ſed ſpecies ſunt æquales: ergo & ſemiſpecies. Quod &c.

Dico *O. a2r*, & *O. ar2* incrementa eſſe æqualia, & decrementa æqualia.

Demonſtr.

Nam ab æqualibus ſpeciebus *O.a2r*, *O.ar2*,
ſup. æquales demptæ ſemiſpecies homonymæ, relinquunt æqualia decrementa. Quod &c.

ſup. Et ab æqualibus ſeſquiſpeciebus, æquales

demptæ species homonymæ, relinquunt æqualia incrementa. Quod &c.

Hypoth. 4.

Sint in tabula subquadratrice, in tertia basi, subquadratrices, secunda *O.3a2r*, & penultima *O.3ar2*.

Dico *O.3a2r*, *O.3ar2*, esse æquales.

Demonstr.

def. 10. p. | Quoniam in tabula multiplicium, in tertia basi, secundus numerus 3, & penultimus 3, ex ijsdem vtrimque vnitatibus, & numeris aggregati, sunt æquales: æquemultiplicant species æquales, *O.a2r*, *O.ar2*; & subquadratrices producunt æquales, *O.3a2r*, *O.3ar2*. Quod &c.

sup. def. 12. b.

Vnde patet, quod & sesquisubquadratrices sunt æquales; & semisubquadratrices æquales; & subquadratricum æqualia sunt incrementa; & æqualia decrementa. Quæ &c.

Hypoth. 5.

Sint denique in tabula quadratrice, in tertia basi, quadratrices, secunda *O.12a2r*, & penultima *O.12ar2*.

Dico, *O.12a2r*, & *O.12ar2*, esse æquales.

Demonstr.

def. 13. b. | Cum sint enim æqualium subquadratricum æquemultiplices; inter se sũt æquales. Quod &c.

Vnde constat, quod & sesquiquadratrices sunt æquales; & semiquadratrices æquales; & quadratricum æqualia sunt incrementa; & æqualia decrementa. Quæ &c.

Quare &c.

Theor.

Theor. 2. Prop. 2.

IN tabula ſpecioſa, cuiuſque numeri, in duobus quibuſque lateribus, vna ſpecies, habet pro incremento, maſſas aggregatas, in vtrolibet latere, ſi quæ ſint præcedentes, atque totam vnitate minùs ordinatam, quàm ſit ipſum latus: maſſas inquam, multiplicatas per numeros tabulæ multiplicium, in baſi acceptos, vnitate minùs ordinata, quàm ſit alterum latus.

Hypoth. 1.

Eſto in tabula ſpecioſa, in primo, & in quintultimo latere, ſpecies *O.a*4: quam in quintultimo latere primam, nullæ ſpecies præcedunt: & eſto quarta tota *t*4.

Dico *O.a*4, incrementum eſſe *t*4.

Demonſtrat.

Eædem abſciſſiones totæ, quibus vnitas, binarius, & deinceps abſcinduntur; etiam ſeſquitotæ, ſunt abſciſſiones: & eædem vtrarumque ſunt abſciſſæ; necnon abſciſſæ quartæ. Sed præter abſciſſiones totæ, vna eſt vlterior abſciſſio ſeſquitotæ, qua ipſa tota abſcinditur: & pro qua poſt abſciſſas quartas totæ, & ſeſquitotę communes, accedit tota quarta, ſeſquitotæ propria: quæ ſpeciei *O. a*4, eſt incremẽtum, ad ſeſquiſpeciem componendam. Quod &c.

def. 18. h.

def. 26. h.

Hypoth. 2.

Eſto in tabula ſpecioſa, in quarto, & in vltimo latere, ſpecies *O.r*3: quam in vltimo latere quar-

quartam, species præcedunt, tertia $O.r2$, secunda $O.r$, prima $O.u$: & esto tota vnitate minùs ordinata, quàm sit vltimum latus: quæ profectò, in
def. 7. p. ordine continuè proportionalium totarum, est
def. 7. 2. ipsa rationalis, atq; vnitas u. Et quoniam $O.r3$, est & in quarto latere, sumatur basis tabulæ multiplicium, vnitate minùs ordinata, nempe tertia, cuius numeri 3, 3.

Dico $O.r3$, incrementum esse, $O.3r2 + O.3r + O.u + u$.

Demonstr.

Eædem abscissiones, totæ sunt, & sesquitotæ: pro quibus vna pars incrementi $O.r3$ taxabitur. Præter abscissiones totæ, vna est vlterior abscissio sesquitotæ, pro qua pars altera eiusdem incrementi taxabitur. Rursum prima pars incrementi, tot ex partibus componitur, quot sunt abscissiones, totæ, & sesquitotæ communes.

Est autem pro vna abscissione, totæ, & sesquitotæ, communi, eadem quidem abscissa, sed non eadem residua. Cumque totæ residua est r, sesquitotæ residua est $r + u$: quoniam & ipsa sesquitota vnitate maior est, quàm tota. Cum er-
8. p. go totæ residua tertia est $r3$; sesquitotæ est, $r3 + 3r2u + 3ru2 + u3$. Et quoniam ratio æqualitatis, quantumlibet multiplicata, semper est ea-
7. 5. dem: & quantumlibet composita, non variat rationes, quibuscum componitur: huiusmodi autem

def. p. p. tem eſt u ad u, ad $u2$, ad $u3$: eadem ergo quantitas eſt $u3$, atque u: & $3ru2$, quæ $3r$: & $3r2u$, quæ $3r2$: & $r3 + 3r2u + 3ru2 + u3$, quæ $r3 + 3r2 + 3r + u$. & ſeſquitotæ reſidua tertia, eſt $r3 + 3r2 + 3r + u$. Sed totæ reſidua tertia, eſt $r3$: ergo cuiuſque reſiduæ incrementum eſt $3r2 + 3r + u$. Et omnium reſiduarum, ideſt, $O.r3$, omnia incrementa ſunt $O.3r2 + O.3r + O.u$: totidem, quot ſunt abſciſſiones communes, totæ, & ſeſquitotæ: & pars prima incrementi taxanda.

Pro vlteriori abſciſſione propria ſeſquitotæ, tota fit abſciſſa, cuius reſidua vnitas: & maſſæ $O.r3$, vlterior reſidua fit $u3$, ideſt u: pars altera incrementi taxanda. Quibus ex partibus, totum componitur incrementũ ſpeciei $O.r3$, quod eſt, $O.3r2 + O.3r + O.u + u$. Quod &c.

Hypoth. 3.

Eſto in tabula ſpecioſa, in quarto, & in quintultimo latere, ſpecies $O.a4r3$: quam in quintultimo latere præcedunt ſpecies, $O.a4r2$, $O.a4r$, $O.a4$: & eſto tota $t4$, vnitate minùs ordinata, quàm ſit latus quintultimum: & eſto baſis tertia multiplicium, vnitate minùs ordinata, quàm ſit latus quartum; in qua baſi, numeri ſunt 3, & 3.

Dico $O.a4r3$, incrementum eſſe, $O.3a4r2 + O.3a4r + O.a4 + t4$.

De-

Demonstr.

Pro communibus enim totæ, & ſeſquitotæ abſciſſionibus; vna eſt pars incrementi: & pro abſciſſione vlteriori, propria ſeſquitotæ; eſt altera. Et prioris partis incrementi, tot ſunt particulæ, quot ſunt abſciſſiones communes; nempè, quot abſciſſæ, quot reſiduæ, quot quadritertiæ: & ſingulæ particulæ, ſingula ſunt increméta quadritertiarum totæ, ad componendas quadritertias ſeſquitotæ.

Porrò totæ, & ſeſquitotæ, pro eadem abſciſſione, eadem eſt abſciſſa; ſed non eadem reſidua: & eadem eſt abſciſſa quarta; ſed non eadem reſidua tertia. cumque reſidua tertia totæ, eſt $r3$; reſidua tertia ſeſquitotæ, eſt $r3 + 3r2 + 3r + u$: (*ſup.*) & cum quadritertia totæ, eſt $a4r3$; quadritertia ſeſquitotæ eſt $a4r3 + 3a4r2 + 3a4r + a4$: & incrementum quadritertiæ, totæ, ad componendam quadritertiam ſeſquitotæ, eſt $3a4r2 + 3a4r + a4$. Et omnia ſimul incrementa quadritertiarum totæ, ad componendas omnes quadritertias ſeſquitotę, ſunt $O.\,3a4r2 + O.\,3a4r + O.\,a4$, prior pars incrementi $O.a4r3$.

Pro vlteriori abſciſſione propria ſeſquitotę, (*ſup.*) abſciſſa eſt t, reſidua u: & abſciſſa quarta $t4$, reſidua tertia $u3$: & quadritertia vlterior propria ſeſquitotæ, eſt $t4u3$, vel $t4$: & eſt poſterior pars incrementi $O.a4r3$. Ex quibus partibus integrum componitur incrementum $O.\,a4r3$, quod eſt,

$O.3a4r2$

$O.\,3a4r2 + O.\,3a4r + O.\,a4 + t4$. Quod &c.

Hypoth. 4.

Esto in tabula speciosa, in quinto, & in quartultimo latere, species $O.\,a3r4$: quàm in quinto latere, præcedũt species, $O.\,a2r4$, $O.\,ar4$, $O.\,r4$: & esto tota $t4$, vnitate minùs ordinata, quàm sit latus quintum: & esto basis tertia multiplicium, vnitate minùs ordinata, quàm sit latus quartultimum; in qua basi sunt numeri 3, 3.

Dico $O.\,a3r4$, incrementum esse, $O.\,3a2r4 + O.\,3ar4$, $+ O.r4 + t4$.

Demonst.

	$O.3a4r2 : O.3a2r4$.
	$O.3a4r : O.3ar4$.
p. h.	$O.a4 : O.r4$.
	$O.\,3a4r2 + O.\,3a4r + O.a4 : O.\,3a2r4 + O.\,3ar4 + O.r4$.
p. h.	Sed $O.a4r3$, & $O.a3r4$ æqualia sunt incremẽta: & est $O.\,a4r3$ incrementum $O.3a4r2 +$
sup.	$O.3a4r + O.a4 + t4$. Ergo etiam $O.\,a3r4$ incrementum est $O.3a2r4 + O.\,3ar4 + O.r4 + t4$. Quod &c.
	Quare &c.

Theor. 3. Prop. 3.

IN tabula speciosa, cuiusque numeri, in duobus quibusque lateribus, vna species, habet pro decremento, massas in vno latere præcedentes, multiplicatas per numeros

 tabu-

tabulæ multiplicium, in basi acceptos, vnitate minùs ordinata, quàm sit alterum latus: proximam quidem massam, & alternas aggregatas; reliquas verò subtractas. Sed si nullæ sunt præcedentes; quòd species in ipso latere sit prima: pro decremento, habet semitotam, vnitate minùs ordinatam, quàm sit alterum latus.

Hypoth. I.

Esto in tabula speciosa, in quinto, & in quartultimo latere, species O.$a3r4$, quam præcedentes, in quartultimo latere, sunt species, O.$a3r3$, O.$a3r2$, O.$a3r$, O.$a3$: quartæ autem basis tabulæ multipliciũ sint numeri 4,6,4.

Dico speciei O.$a3r4$, decrementum esse O.$4a3r3$ — O.$6a3r2$ + O.$4a3r$ — O.$a3$.

Demonstr.

def.19.b Eædem abscissiones, quibus vnitas, binarius, & deinceps abscinduntur, etiam semitotæ sunt abscissiones; præter vnam propriam totæ, qua ipsa abscinditur semitota, & vnitas relinquitur.

Quantum ad communes attinet abscissiones, cum eædem sint abscissæ, totæ, & semitotæ; non eædem sunt residuæ: cumque totæ residua sit r; semitotæ residua est $r - u$: & cum totæ residua quarta, sit $r4$; semitotæ residua quarta est $r4 - 4r3 + 6r2 - 4r + u$: cum deniq; totæ triquarta sit $a3r4$; semitotæ triquarta est $a3r4 - 4a3r3 + 6a3r2 - 4a3r + a3$. 10.p.

Quantum ad non communem attinet abscissionem, si

resi-

resida vnitas, vnitate minuatur, profectò nihil remanet: eritque r quidem, vnitas; sed $r - u$, nihil: & erit $r4$, vnitas; sed $r4 - 4r3 + 6r2 - 4r + u$, nihil: & triquarta quidem totæ, erit $a3r4$; sed semitotæ alia vlterior quasi triquarta $a3r4 - 4a3r3 + 6a3r2 - 4a3r + a3$, nihil. Ideoque perinde est, proprias computare semitotę triquartas, pro communibus; atque vnam amplius adijcere triquartam nullam, pro non communi absciſſione. Quare omnes triquartę, semitotę, sunt $O.a3r4 - O.4a3r3 + O.6a3r2 - O.4a3r + O.a3$; reuera pauciores, quàm ipsius totæ sunt absciſſiones; sed perinde æquales, atque si totidem numerarentur. Totæ autem, triquartæ omnes, sunt $O.a3r4$; reuera totidem, quot sunt eius absciſſiones. Et vtrarumque differentia, $O.4a3r3 - O.6a3r2 + O.4a3r - O.a3$, est decrementũ speciei $O.a3r4$. Quod &c.

Hypoth. 2.

Esto in tabula speciosa, in quarto, & in quintultimo latere, species $O.a4r3$: quam præcedentes in quarto latere, sunt species, $O.a3r3$, $O.a2r3$, $O.ar3$, $O.r3$: quartæ autem basis tabulæ multiplicium, numeri sunt 4, 6, 4.

Dico speciei $O.a4r3$, decrementum esse $O.4a3r3 - O.6a2r3 + O.4ar3 - O.r3$.

Demonstr.

p. h. | $O.6a3r2 : O.6a2r3$.
| $O.4a3r : O.4ar3$.
| $O.a3 : O.r3$.
| $O.4a3r3 - O.6a3r2 + O.4a3r - O.a3 : O.$

 $4a3r3$

$4a3r3 - O.6a2r3 + O.4ar3 - O.r3$.

p. h. Sed $O.a3r4$, & $O.a4r3$, decrementa sunt æqualia : & est $O.a3r4$, decrementum $O.4a3r3 - 6a3r2 + O.4a3r - O.a3$: ergo etiam $O.a4r3$, decrementum est $O.4a3r3 - O.6a2r3 + O.4ar3 - O.r3$. Quod &c.

sup.

Hypoth. 3.

Esto in quartultimo latere, prima species $O.a3$: & esto semitota tertia $m3$.

Dico, decrementum $O.a3$, esse $m3$.

Demonstr.

Pro communibus enim totæ, & semitotæ abscissionibus, eædem vtrarumq; sunt abscissæ, & in proposita specie $O.a3$, residuæ nullæ : pro vlteriori verò abscissione, totæ propria, vltima est abscissa, vnitate minor, quàm tota, id est, semitota m : & vltima abscissa tertia, propria totæ, est $m3$. Quare speciei $O.a3$, decrementũ est $m3$. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 4. Prop. 4.

Tota quælibet, est æqualis, aggregatis omnibus minùs ordinatarum abscissarum speciebus, & vnitati, acceptis secundum numeros multiplices, in basi sibi æquordinata iacentes.

Hypoth.

Esto tota quinta $t5$; qua minùs ordinatæ abscissæ, $a4$, $a3$, $a2$, a, a; quarum species, $O.a4$, $O.a3$, $O.a2$, $O.a$, $O.u$:

O.u: & esto basis quinta multiplicium, cuius numeri, 5, 10, 10, 5.

Dico 15 : O.5a4 + O.10a3 + O.10a2 + O.5a + O.u + u.

Demonstratio.

p. b. | O.a5, & O.r5, æqualia sunt incrementa: quorum alterum, r5; alterum, O.5a4 + O.10a3
2. b. | + O.10a2 + O.5a + O.u + u. Quòd &c.
| Quare &c.

Theor. 5. Prop. 5.

Demonstrare, qualiter acceptis totis, quæque massa est æqualis.

Methodus Demonstrationis.

Oportet in demonstrando, procedere, à prioribus basibus tabulæ speciosæ, ad posteriores; & in singulis basibus, ab exterioribus speciebus, ad interiores.

| Porrò in singulis basibus, pro prima, & vltima specie, vna est demonstratio; item pro secunda, & penultima; pro tertia, & tritultima. Nam, verbi gratia, secunda, qualiter acceptis totis demonstrabitur æqualis; taliter acceptis, æqualis erit etiã penultima: quia constat, secundam, & penulti-
p. b. | mam, esse æquales.

Sub hoc vno titulo, theoremata conueniunt innumerabilia: cum enim tabula speciosa, sit producibilis in infinitum, habet massas innumerabiles; idest, semper plures,

quàm

quàm quot quisque assignauerit.

Vna tamen est omnium communis methodus demonstrandi, & duo sunt argumenta: vnum, ab æqualibus cuiusdam speciei incrementis; alterum ab æqualibus decrementis.

Pro vlteriori methodi ennarratione, dabimus triginta sex theoremata; quæ sufficiunt, pro vertice, & basibus tabulæ speciosæ, vsque ad decimam inclusiuè: quædam demonstrata per vtrumque argumentum; quædam solùm per alterum; quædam denique sine demonstratione.

1. O.*u*: *t*—*u*.

Demonstr. 1.

4. *h.* | O.*u* + *u*: *t*.
| O.*u*; *t*—*u*. Quod &c.

Demonstr. 2.

| O. *a*. decrementa sunt æqualia.
3. *h.* | O.*u*: *m*.
def. 19. *h.* | *m*: *t* — *u*.
| O.*u*: *t*—*u*. Quod &c.

---

2. O.2*a*: *t*2 —*t*.

Demonstr. 1.

4. *h.* | O. 2*a* + O. *u* + *u*: *t*2.
| O. 2*a*: *t*2 — O. *u* — *u*.
sup. 1. | O. *u*: *t*—*u*.
p. *h.* | O. 2*a*: *t*2 — *t*. Quod &c.

De-

Demonstr. 2.

$O.a2$, decrementa ſunt æqualia.

3. *h.* $O.2a - O.u : m2.$

$O.2a : m2 + O.u.$

def. 21. *h.* $m2 : t2 - 2t + u.$

ſup. p. $O.u : t - u.$

$O.2a : t2 - t.$ Quòd &c.

---

3. $O.6a2 : 2t3 - 3t2 + t.$

Demonſtr. 1.

4. *h.* $O.3a2 + O.3a + O.u + u : t3.$

$O.6a2 + O.6a + O.2u + 2 : 2t3.$

$O.6a2 : 2t3 - O.6a - O.2u - u.$

ſup. 2. $O.6a : 3t2 - 3t.$

ſup. p. $O.2u : 2t - 2.$

$O.6a2 : 2t3 - 3t2 + t.$ Quod &c.

Demonſtr. 2.

$O.a3$, decrementa ſunt æqualia.

3. *h.* $O.3a2 - O.3a + O.u : m3.$

$O.6a2 - O.6a + O.2u : 2m3.$

$O.6a2 : 2m3 + O.6a - O.2u.$

def. 21. *h* $2m3 : 2t3 - 6t2 + 6t - 2.$

ſup. 2. $O.6a : 3t2 - 3t.$

ſup. p. $O.2u : 2t - 2.$

$O.6a2 : 2t3 - 3t2 + t.$ Quod &c.

---

4. $O.6ar : t3 - t.$

Demonstr. 1.

$O.a2r$, incrementa sunt æqualia.

2. *h.* $O.2ar + O.r + t : O.a2 + t2.$

$O.12ar + O.6r + 6t : O.6a2 + 6t2.$

$O.12ar : O.6a2 - O.6r + 6t2 - 6t.$

sup. 3. $O.6a2 : 2t3 - 3t2 + t.$

sup. 2. $O.6r : 3t2 - 3t.$

$O.12ar : 2t3 - 2t.$

$O.6ar : t3 - t.$ Quod &c.

Demonstr. 2.

$O.a2r$, decrementa sunt æqualia.

3. *h.* $O.2ar - O.r : O.a2.$

$O.12ar - O.6r : O.6a2.$

$O.12ar : O.6a2 + O.6r.$

sup. 3. $O.6a2 : 2t3 - 3t2 + t.$

sup. 2. $O.6r : 3t2 - 3t.$

$O.12ar : 2t3 - 2t.$

$O.6ar : t3 - t.$ Quod &c.

---

5. $O.4a3 : t4 - 2t3 + t2.$

Demonstr.

4. *h.* $O.4a3 + O.6a2 + O.4a + O.u + u : t4.$

sup. p. $O.u : t - u.$

sup. 2. $O.4a : 2t2 - 2t.$

sup. 3. $O.6a2 : 2t3 - 3t2 + t.$

$O.4a3$

| $O.4a3 + 2t3 - t2 : t4.$
| $O.4a3 : t4 - 2t3 + t2.$ Quòd &c.

---

6. $O.12a2r : t4 - t2.$ *Demonst.* 1.

	$O.a3r$, incrementa sunt æqualia.
2. h.	$O.3a2r + O.3ar + Or + t : O.a3 + t3.$
	$O.12a2r + O.12ar + O.4r + 4t : O.4a3 + 4t3.$
sup. 4. & 2.	$O.12ar : 2t3 - 2t.$ $O.4r : 2t2 - 2t.$
sup 5.	$O.4a3 : t4 - 2t3 + t2.$
	$O.12a2r + 2t3 + 2t2 : t4 + 2t3 + t2.$
	$O.12a2r : t4 - t2.$ Quod &c. *Demonst.* 2.
	$O.a3r$, decrementa sunt æqualia.
3. h.	$O.3a2r - O.3ar + Or : O.a3.$
	$O.12a2r - O.12ar + O.4r : O.4a3.$
sup. 4.	$O.12ar : 2t3 - 2t.$
sup. 2.	$O.4r : 2t2 - 2t.$
sup. 5.	$O.4a3 : t4 - 2t3 + t2.$
	$O.12a2r - 2t3 + 2t2 : t4 - 2t3 + t2.$
	$O.12a2r : t4 - t2.$ Quod &c.

---

7. $O.30a4 : 6t5 - 15t4 + 10t3 - t.$

Demonstr.

4. h.	$O.5a4 + O.10a3 + O.10a2 + O.5a + O.u + u : t5.$
sup. 2.	$O.60a4 + O.120a3 + O.120a2 + O.60a + O.12u$
	$+ 12 : 12t5.$ $O.60a : 30t2 - 30t.$
sup. 3.	$O.120a2 : 40t3 - 60t2 + 20t.$
sup. 5.	$O.120a3 : 30t4 - 60t3 + 30t2.$

F $O.12u$

sup. p. | O.12u: 12t — 12.
| O.60a4+30t4 — 20t3+2t: 12t5.
| O.30a4+15t4 — 10t3+t: 6t5.
| O.30a4: 6t5 — 15t4+10t3 — t. Quod &c.

---

8. O.60a3r: 3t5 — 5t3+2t.

Demonstr.

| O.a4r, decrementa sunt æqualia.
3. b. | O.4a3r — O.6a2r + O.4ar — Or: O.a4.
| O.120a3r — O.180a2r + O.120ar — O.30r: O.30a4.
sup. 6. | O.180a2r: 15t4 — 15t2.
sup. 4. | O.120ar: 20t3 — 20t.
sup. 2. | O.30r: 15t2 — 15t.
sup. 7. | O.30a4: 6t5 — 15t4+10t3 — t.
| O.120a3r — 15t4 + 20t3 — 5t: 6t5 — 15t4 + 10t3 — t.
| O.120a3r: 6t5 — 10t3+4t.
| O.60a3r: 3t5 — 5t3+2t. Quod &c.

---

9. O.30a2r2: t5 — t.

Demonstr.

| O.a3r2, decrementa sunt æqualia.
3. b. | O.3a2r2 — O.3ar2 + Or2: O.2a3r — O.a3.
| O.180a2r2 — 180ar2 + O.60r2: O.120a3r + O.60a3.
sup. 6. | O.180ar2: 15t4 — 15t2.

O.60r2:

sup. 3. | 0.60r2 : 20t3 — 30t2 + 10t.
sup. 8. | 0.120a3r : 6t5 — 10t3 + 4t.
sup. 5. | 0.60a3 : 15t4 — 30t3 + 15t2.
| 0.180a2r2 — 15t4 + 20t3 — 15t2 + 10t : 6t5.
— 15t4 + 20t3 — 15t2 + 4t.
| 0.180a2r2 : 6t5 — 6t.
| 0.30a2r2 : t5 — t. Quod &c.

---

10. 0.12a5 : 2t6 — 6t5 + 5t4 — t2.
11. 0.60a4r : 2t6 — 5t4 + 3t2.
12. 0.60a3r2 : t6 — t2.
13. 0.42a6 : 6t7 — 21t6 + 21t5 — 7t3 + t.
14. 0.84a5r : 2t7 — 7t5 + 7t3 — 2t.
15. 0.210a4r2 : 2t7 — 7t3 + 5t.
16. 0.420a3r3 : 3t7 + 7t3 — 10t.
17. 0.24a7 : 3t8 — 12t7 + 14t6 — 7t4 + 2t2.
18. 0.168a6r : 3t8 — 14t6 + 21t4 — 10t2.
19. 0.168a5r2 : t8 — 7t4 + 6t2.
20. 0.840a4r3 : 3t8 + 7t4 — 10t2.
21. 0.90.a8 : 10t9 — 45t8 + 60t7 — 42t5 + 20t3
— 3t.
22. 0.360a7r : 5t9 — 30t7 + 63t5 — 50t3 + 12t.
23. 0.1260a6r2 : 5t9 — 63t5 + 100t3 — 42t.
24. 0.2520a5r3 : 5t9 + 21t5 — 110t3 + 84t.
25. 0.630a4r4 : t9 + 20t3 — 21t.
26. 0.20a9 : 2t10 — 10t9 + 15t8 — 14t6 + 10t4
— 3t2.

27. $O.180a8r : 2t10 - 15t8 + 42t6 - 50t4 + 21t2.$
28. $O.360a7r2 : t10 - 2t16 + 50t4 - 30t2.$
29. $O.840a6r3 : t10 + 7t6 + 50t4 + 42t2.$
30. $O.1260a5r4 : t10 + 20t4 - 21t2.$
31. $O.66a10 : 6t11 - 33t10 + 55t9 - 66t7 + 66t5 - 33t3 + 5t.$
32. $O.660a9r : 6t11 - 55t9 + 198t7 - 330t5 + 231t3 - 50t.$
33. $O.990a8r2 : 2t11 - 66t7 + 220t5 - 231t3 + 75t.$
34. $O.1320a7r3 : t11 + 11t7 - 110t5 + 198t3 - 100t.$
35. $O.2310a6r4 : t11 + 55t5 - 231t3 + 175t.$
36. $O2772a5r5 : t11 - 22t5 + 231t3 - 210t.$

Et in infinitum, eadem methodo supra tradita, potest demonstrari, qualiter acceptis totis, quæque massa est æqualis.

Theor. 6. Prop. 6.

Demonstrare, qualiter acceptis semitotis, quæque massa est æqualis.

Meth. Demonstr.

Oportet præsupponere theoremata demonstrata in præcedenti, sua cuiusque massæ propria: deinde totas resoluere in semitotas, per *def.* 19.*h.* & per 8.*p.* vt sequitur.

$t : m + u.$

$t2 : m2 + 2m + u.$

$t3:$

$t3 : m3 + 3m2 + 3m + u.$
$t4 : m4 + 4m3 + 6m2 + 4m + u.$
$t5 : m5 + 5m4 + 10m3 + 10m2 + 5m + u.$
$t6 : m6 + 6m5 + 15m4 + 20m3 + 15m2 + 6m + u.$
$t7 : m7 + 7m6 + 21m5 + 35m4 + 35m3 + 21m2 + 7m + u.$
$t8 : m8 + 8m7 + 28m6 + 56m5 + 70m4 + 56m3 + 28m2 + 8m + u.$
$t9 : m9 + 9m8 + 36m7 + 84m6 + 126m5 + 126m4 + 84m3 + 36m2 + 9m + u.$
$t10 : m10 + 10m9 + 45m8 + 120m7 + 210m6 + 252m5 + 210m4 + 120m3 + 45m2 + 10m + u.$
$t11 : m11 + 11m10 + 55m9 + 165m8 + 330m7 + 462m6 + 462m5 + 330m4 + 165m3 + 55m2 + 11m + u.$

Vnde, pro triginta ſex theorematis propoſitis in præcedenti, & demonſtrabilibus, alia triginta ſex proponemus, in præſenti, demonſtrabilia, videlicet.

1. $O.u : m.$
2. $O.2a : m2 + m.$
3. $O.6a2 : 2m3 + 3m2 + m.$
4. $O.6ar : m3 + 3m2 + 2m.$
5. $O.4a3 : m4 + 2m3 + m2.$
6. $O.12a2r : m4 + 4m3 + 5m2 + 2m.$
7. $O.30a4 : 6m5 + 15m4 + 10m3 - m.$
8. $O.60a3r : 3m5 + 15m4 + 25m3 + 15m2 + 2m.$

9. O.

9. O.30a2r2 : m5 + 5m4 + 10m3 + 10m2 + 4m.

10. O.12a5 : 2m6 + 6m5 + 5m4 — m2.

11. O.60a4r : 2m6 + 12m5 + 25m4 + 20m3 + 3m2 — 2m.

12. O.60a3r2 : m6 + 6m5 + 15m4 + 20m3 + 14m2 + 4m.

13. O.42a6 : 6m7 + 21m6 + 21m5 — 7m3 + m.

14. O.84a5r : 2m7 + 14m6 + 35m5 + 35m4 + 7m3 — 7m2 — 2m.

15. O.210a4r2 : 2m7 + 14m6 + 42m5 + 70m4 + 63m3 + 21m2 — 2m.

16. O.420a3r3 : 3m7 + 21m6 + 63m5 + 105m4 + 112m3 + 84m2 + 32m.

17. O.24a7 : 3m8 + 12m7 + 14m6 — 7m4 + 2m2.

18. O.168a6r : 3m8 + 24m7 + 70m6 + 84m5 + 21m4 — 28m3 — 10m2 + 4m.

19. O.168a5r2 : m8 + 8m7 + 28m6 + 56m5 + 63m4 + 28m3 — 8m2 — 8m.

20. O.840a4r3 : 3m8 + 24m7 + 84m6 + 168m5 + 217m4 + 196m3 + 116m2 + 32m.

21. O.90a8 : 10m9 + 45m8 + 60m7 — 42m5 + 20m3 — 3m.

22. O.360a7r : 5m9 + 45m8 + 150m7 + 210m6 + 63m5 — 105m4 — 50m3 + 30m2 + 12m.

23. O.1260a6r2 : 5m9 + 45m8 + 180m7 + 420m6 + 567m5 + 315m4 — 110m3 — 150m2 — 12m.

24. O.2520a5r3 : 5m9 + 45m8 + 180m7 + 420m6 + 651m5

651m5+735m4+520m3+60m2−96m.

25. O.630a4r4:m9+9m8+36m7+84m6+126m5 +126m4+104m3+96m2+48m.

26. O.20a9: 2m10+10m9+15m8—14m6+10m4 —3m2.

27. O.180a8r: 2m10+20m9+75m8+120m7+42m6 —84m5—50m4+40m3+21m2—6m.

28. O.360a7r2: m10+10m9+45m8+120m7+ 189m6+126m5—55m4—100m3+24m.

29. O.840a6r3: m10+10m9+45m8+120m7+ 217m6+294m5+265m4+60m3—108m2— 64m.

30. O.1260a5r4: m10+10m9+45m8+120m7+ 210m6+252m5+230m4+200m3+144m2+ 48m.

31. O.66a10: 6m11+33m10+55m9—66m7+ 66m5—33m3+5m.

32 O.660a9r: 6m11+66m10+275m9+495m8+ 198m7—462m6—330m5+330m4+231m3 —99m2—50m.

33. O.990a8r2: 2m11+22m10+110m9+330m8+ 594m7+462m6—242m5—550m4—11m3 +231m2+42m.

34. O.1320a7r3: m11+11m10+55m9+165m8+ 341m7+539m6+583m5+165m4—352m3 —220m2+32m.

35. O.2310a6r4: m11+11m10+55m9+165m8+ 330m7

$330m7+462m6+517m5+605m4+484m3-$
$88m2-232m.$

36. $0.2772a5r5 : m11+11m10+55m9+165m8+$
$330m7+462m6+440m5+220m4+176m3+$
$528m2+384m.$

Sicut autem possibile est, vltra decimam basim speciosæ tabulæ, in demonstrando procedere, in præcedenti; & ostændere, qualiter accepis totis quæque massa est æqualis: ita possibile est in præsenti procedere; & demonstrare, qualiter acceptis semitotis, quæque massa est æqualis.

Theor. 7. Prop. 7.

Demonstrare, qualiter acceptis sesquitotis, quæque massa est æqualis.

Meth. Demonstr.

Oportet præsupponere theoremata, demonstrata sub titulo *prop.* 5. *h.* sua cuiusque propria: deinde totas resoluere in sesquitotas per *def.* 18. *h.* & per 10. *p.* vt sequitur.

$t:q-u.$
$t2:q2-2q+u.$
$t3:q3-3q2+3q-u.$
$t4:q4-4q3+6q2-4q+u.$
$t5:q5-5q4+10q3-10q2+5q-u.$
$t6:q6-6q5+15q4-20q3+15q2-6q+u.$
$t7:q7-7q6+21q5-35q4+35q3-21q2+7q-u.$
$t8:q8-8q7+28q6-56q5+70q4-56q3+28q2-$
$8q+u.$

19: q9 — 9q8 + 36q7 — 84q6 + 126q5 — 126q4 + 84q3
— 36q2 + 9q — u.

110: q10 — 10q9 + 45q8 — 120q7 + 210q6 — 252q5
+ 210q4 — 120q3 + 45q2 — 10q + u.

111: q11 — 11q10 + 55q9 — 165q8 + 330q7 — 462q6
+ 462q5 — 330q4 + 165q3 — 55q2 + 11q — u.

Vnde, pro triginta sex theorematis, propositis in 5. *h.* alia triginta sex proponemus, in præsenti, demonstrabilia, videlicet.

1. *O.u* : q — 2.
2. *O.2a* : q2 — 3q + 2.
3. *O.6a2* : 2q3 — 9q2 + 13q — 6.
4. *O.6ar* : q3 — 3q2 + 2q.
5. *O.4a3* : q4 — 6q3 + 13q2 — 12q + 4.
6. *O.12a2r* : q4 — 4q3 + 5q2 — 2q.
7. *O.30a4* : 6q5 — 45q4 + 130q3 — 180q2 + 119q
— 30.
8. *O.60a3r* : 3q5 — 15q4 + 25q3 — 15q2 + 2q.
9. *O.30a2r2* : q5 — 5q4 + 10q3 — 10q2 + 4q.
10. *O.12a5* : 2q6 — 18q5 + 65q4 — 120q3 + 119q2 —
60q + 12.
11. *O.60a4r* : 2q6 — 12q5 + 25q4 — 20q3 + 3q2 + 2q.
12. *O.60a3r2* : q6 — 6q5 + 15q4 + 10q3 + 14q2 — 4q.
13. *O.42a6* : 6q7 — 63q6 + 273q5 — 630q4 + 833q3
— 630q2 + 253q — 42.
14. *O.84a5r* : 2q7 — 14q6 + 35q5 — 35q4 + 7q3 +
7q2 — 2q.

 15. *O.*

15. *O.210a4r2 : 2q7 — 14q6 + 42q5 — 70q4 + 63q3 — 21q2 — 2q.*

16. *O.420a3r3 : 3q7 — 21q6 + 63q5 — 105q4 + 112q3 — 84q2 + 32q.*

17. *O.24a7 : 3q8 — 36q7 + 182q6 — 504q5 + 833q4 — 840q3 + 506q2 — 168q + 24.*

18. *O.168a6r : 3q8 — 24q7 + 70q6 — 84q5 + 21q4 + 28q3 — 10q2 — 4q.*

19. *O.168a5r2 : q8 — 8q7 + 28q6 — 56q5 + 63q4 — 28q3 — 8q2 + 8q.*

20. *O.840a4r3 : 3q8 — 24q7 + 84q6 — 168q5 + 217q4 — 196q3 + 116q2 — 32q.*

21. *O.90a8 : 10q9 — 135q8 + 780q7 — 2520q6 + 4998q5 — 6300q4 + 5060q3 — 2520q2 + 717q — 90.*

22. O.360a7r : 5q9 — 45q8 + 150q7 — 210q6 + 63q5 + 105q4 — 50q3 — 30q2 + 12q.

23. O.1260a6r2 : 5q9 — 45q8 + 180q7 — 420q6 + 567q5 — 315q4 + 110q3 + 150q2 — 12q.

24. O.2520a5r3 : 5q9 — 45q8 + 180q7 — 420q6 + 651q5 — 735q4 + 520q3 — 60q2 — 96q.

25. O.630a4r4 : q9 — 9q8 + 36q7 — 48q6 + 126q5 — 126q4 + 104q3 — 96q2 + 48q.

26. *O.20a9 : 2q10 — 30q9 + 195q8 — 720q7 + 1666q6 — 2520q5 + 2530q4 — 1680q3 + 717q2 — 180q + 20*

27. O.180a8r : 2q10 — 20q9 + 75q8 — 120q7 + 42q6 + 84q5 — 50q4 — 40q3 + 21q2 + 6q.

28. O.

28. 0.360a7r2 : q10 — 10q9 + 45q8 — 120q7 + 189q6 — 126q5 — 55q4 + 100q3 — 24q.

29. 0.840a6r3 : q10 — 10q9 + 45q8 — 120q7 + 217q6 — 294q5 + 265q4 — 60q3 — 108q2 + 64q.

30. 0.1260a5r4 : q10 — 10q9 + 45q8 — 120q7 + 210q6 — 252q5 + 230q4 — 200q3 + 144q2 — 48q.

31. 0.66a10 : 6q11 — 99q10 + 715q9 — 2970q8 + 7854q7 — 13860q6 + 16698q5 — 13860q4 + 7887q3 — 2970q2 + 665q — 66.

32. 0.660a9r : 6q11 — 66q10 + 275q9 — 495q8 + 198q7 + 462q6 — 330q5 — 330q4 + 231q3 + 99q2 — 50q.

33. 0.990a8r2 : 2q11 — 22q10 + 110q9 — 330q8 + 594q7 — 462q6 — 242q5 + 550q4 — 11q3 — 231q2 + 42q.

34. 0.132a7r3 : q11 — 11q10 + 55q9 — 165q8 + 341q7 — 539q6 + 583q5 — 165q4 — 352q3 + 220q2 + 32q.

35. 0.2310a6r4 : q11 — 11q10 + 55q9 — 165q8 + 330q7 — 462q6 + 517q5 — 605q4 + 484q3 + 88q2 — 232q.

36. 0.2772a5r5 : q11 — 11q10 + 55q9 — 165q8 + 330q7 — 462q6 + 440q5 — 220q4 + 176q3 — 528q2 + 384q.

Sicut autem poſſibile eſt, vltra decimam baſim ſpecioſę tabulæ demonſtrare, qualiter acceptis totis quæque maſſa eſt æqualis, iuxta methodum 5 h. ita poſſibile eſt, etiam in

præſenti procedere in infinitum, & demonſtrare, etiam, vltra decimam baſim, qualiter acceptis ſeſquitotis, quæque maſſa eſt æqualis.

Theor. 8. Prop. 8.

DEmonſtrare, qualiter acceptis primi lateris ſpeciebus, quæque maſſa eſt æqualis.

Meth. Demonſtr.

Sub hoc vno titulo, innumerabilia theoremata cenſeri poſſent, quorum vna communis eſt methodis demonſtrandi, per 5. *h.* reſoluendo maſſas, in totas ſibi æquales; & per 4. *h.* reſoluendo totas, in ſpecies primi lateris ſibi æquales.

Pro vlteriori methodi enarratione, proponemus viginti quinque theoremata, vnum cum demonſtratione, & reliqua ſine demonſtratione, quæ poſſunt facilè demonſtrari, ſecundum methodum aſſignatam.

1. *O2ar : O.a2 + O.a.*

Demonſtr.

5. *h.* | *O.6ar : t3 — t.*
4. *h.* | *t3 : O.3a2 + O.3a + O.u + u.*
| *t : O.u + u.*
| *O.6ar : O.3a2 + O.3a.*
| *O.2ar : O.a2 + O.a.* Quod, &c.

2. *O.6a2r : O.2a3 + O.3a2 + O.a.*

3. *O.4a3r : O.a4 + O.2a3 + O.a2.*

4. *O.*

4. O.6a3r2: O.a4+O.2a3+O.2a2+O.a.

5. O.30a4r: O.6a5+O.15a4+O.10a3 — O.a.

6. O.60a3r2: O.6a5+O.15a4+O.20a3+O.15a2 +O.4a.

7. O.12a5r: O.2a6+O.6a5+O.5a4 — O.a2.

8. O.30a4r2: O.2a6+O.6a5+O.10a4+O.10a3+ O.3a2 — O.a.

9. O.20a3r3: O.a6+O.7a5+O.5a4+O 5a3+O.4a2 — O.2a.

10. O.42a6r: O.6a7+O.21a6+O.21a5 — O.7a3+O.a.

11. O.84a5r2: O.4a7+O.14a6+O.28a5+O.35a4+ O.14a3 — O.7a2 — O.4a.

12. O.420a4r3: O.12a7+O.42a6+O.84a5+O.105a4 +O.98a3+O.63a2+O.16a.

13. O.24a7r: O.3a8+O.12a7+O.14a6 — O.7a4+ O.2a2.

14. O.84a6r2: O.3a8+O.12a7+O.28a6+O.42a5+ O.21a4 — O.14a3 — O.10a2+O.2a.

15. O.168a5r3: O.3a8+O.12a7+O.28a6+O.42a5 O.49a4+O.42a3+O.4a2 — O.12a.

16. O.210a4r4: O.3a8+O.12a7+O.28a6+O.42a5+ O.42a4+O.28a3+O.32a2+O.23a.

17. O.90a8r: O.10a9+O.45a8+O.60a7 — O.42a5+ O.20a3 — O.3a.

18. O 360a7r2: O.10a9 + O.45a8 + O.120a7 + O.210a6 + O.126a5 — O105a4 — O100a3 + O.30a2 + O.24a.

19. O.

19. 0.84046r3 : O.1049 + O.4548 + O.12047 + O.21046 + O.29445 + O.31544 + O.6043 — O.15042 — O.644.

20. 0.126045r4 : O.1049 + O.4548 + O.12047 + O.21046 + O.25245 + O.21044 + O.20043 + O.16542 + O.48a.

21. 0.2049r : O.2410 + O.1049 + O.1548 — O.1446 + O.1044 — 0.342.

22. 0.9048r2 : O.2410 + O.1049 + O.3048 + O.6047 + 0.4246 — 0.4245 — O5044 + 0.2043 + 0.2142 — O.3a.

23. 0.12047r3 : O.410 + O.549 + O.1548 + O.3047 + O.4946 + O.6345 + O.1544 — O. 5043 — 0.2042 + O.12a.

24. 0.21046r4 : O.410 + O.549 + O.1548 + O.3047 + O.4246 + O.4245 + O.5544 + O.6543 — 0.842 — O.37a.

25. 0.25245r5 : O.410 + O.549 + O.1548 + O. 3047 + O.4246 + O.4245 + O.2044 — O.543 + 0.4842 + 0.54a.

Aliaque possunt in infinitum proponi theoremata, & demonstrari, quibus pateat, qualiter acceptis primi lateris speciebus, quęque massa est æqualis.

Theor. 9. Prop. 9.

Demonstrare, quæ, & qualiter acceptæ totæ species in eadem basi vicinas, aliqualiter acceptas, æquales faciant.

Ex

Ex innumerabilibus theorematis, quæ sunt huius tituli, proponimus vigintiquinque: & ex his quatuor solũmodo demonstramus; quæ sufficiunt, ad ostendendã methodum.

1. $O.2a2+t2 : O.4ar+t.$

Demonstr.

5. *b.* | $O.6a2 : 2t3 - 3t2+t.$
| $O.6a2+3t2 - t : 2t3.$
5. *b.* | $O.6ar : t3 - t.$ $O.12ar : 2t3 - 2t.$
| $O.12ar+2t : 2t3.$
| $O.6a2+3t2 - t : O.12ar+2t.$
| $O.6a2+3t2 : O.12ar+3t.$
| $O.2a2+t2 : O.4ar+t.$ Quod &c.

---

2. $O.2a3+t3 : O.6a2r+t2.$

Demonstr.

5. *b.* | $O.4a3 : t4 - 2t3+t2.$ $O.4a3+2t3 - t2 : t4.$
5. *b.* | $O.12a2r : t4 - t2.$ $O.12a2r+t2 : t4.$
| $O.4a3+2t3 - t2 : O.12a2r+t2.$
| $O.4a3+2t3 : O.12a2r+2t2.$
| $O.2a3+t3 : O.6a2r+t2.$ Quod &c.

---

3. $O.6a4+t4+t : O.24a3r+4t3.$

Demonstr.

5. *b.* | $O.30a4 : 6t5 - 15t4+10t3 - t.$
| $O.30a4+15t4 - 10t3+t : 6t5.$
5. *b.* | $O.60a3r : 3t5 - 5t3+2t.$
| $O.60a3r+5t3 - 2t : 3t5.$

$O.120a3r$

5. h.	O.120a3r + 10t3 − 4t : 6t5.
	O.30a4 + 15t4 − 10t3 + t : O.120a3r + 10t3 − 4t.
	O.30a4 + 15t4 + 5t : O.120a3r + 20t3.
	O.6a4 + 3t4 + t : O.24a3r + 4t3. Quod &c.

4\. O.12a3r + t3 : O.18a2r2 + t.

Demonstr.

5. h.	O.60a3r : 3t5 − 5t3 + 2t.
	O.60a3r + 5t3 − 2t : 3t5.
5. h.	O.30a2r2 : t5 − t.
	O.30a2r2 + t : t5.
	O.90a2r2 + 3t : 3t5.
	O.60a3r + 5t3 − 2t : O.90a2r2 + 3t.
	O.60a3r + 5t3 : O.90a2r2 + 5t.
	O.12a3r + t3 : O.18a2r2 + t. Quod, &c.

5\. O.6a5 + 3t5 + 2t2 : O.30a4r + 5t4.

6\. O.12a4r + t4 : O.24a3r2 + t2.

7\. O6a6 + 3t6 + 4t3 : O.36a5r + 6t5 + t.

8\. O.12a5r + t5 + t : O.30a4r2 + 2t3.

9\. O.18a4r2 + t3 : O.24a3r3 + t.

10\. O.6a7 + 3t7 + 7t4 : O.42a6r + 7t6 + 3t2.

11\. O.12a6r + t6 + 2t2 : O.36a5r2 + 3t4.

12\. O.18a5r2 + t4 : O.30a4r3 + t2.

13\. O.30a8 + 15t8 + 56t5 + 9t : O.80a7r + 40t7 + 40t3.

14\. O.60a7r + 5t9 + 25t3 : O.210a6r2 + 21t5 + 9t.

15\. O.30a6r2 + 2t5 + 3t : O.60a5r3 + 5t3.

16. *0.120a5r3+10t3 : 0.150a4r4+t5+9t.*
17. *0.10a9+5t9+28t6+12t2:0.90a8r+15t8+30t4*
18. *0.60a8r+5t8+50t4:0.240a7r2+28t6+27t2.*
19. *0.90a7r2+7t6+18t2:0.210a6r3+25t4.*
20. *0.120a6r3+10t4:0.180a5r4+t6+9t2.*
21. *0.6a10+3t10+24t7+24t3 : 0.60a9r+10t9 +36t5+5t.*
22. *0.60a9r+5t9+90t5+25t : 0.270a8r2+36t7 +84t3.*
23. *0.90a8r2+8t7+57t3 :0.240a7r3+40t5+25t.*
24. *0.120a7r3+15t5+25t:0.210a6r4+t7+39t3.*
25. *0.30a6r4+6t3:0.36a5r5+t5+5t.*

Et alia huiusmodi proponi possunt innumerabilia: quibus in singulis demonstrari poterit, quæ, & qualiter acceptæ totæ, species in eadem basi vicinas, aliqualiter acceptas, æquales faciant.

Theor. 10. Prop. 10.

DEmonstrare, quæ, & qualiter acceptæ semitotæ, species in eadem basi vicinas, aliqualiter acceptas, æquales faciant.

Pro innumerabilibus theorematis huius tituli, vigintiquinque proponimus, & vnum demonstramus, ad ostensionem methodi.

1. *0.2a2+m2+m: 0.4ar.*

Demonstr.

6. b. $O.6a2 : 2m3+3m2+m.$

$O.6a2 - 3m2 - m : 2m3.$

6. b. $O.6ar : m3+3m2+2m.$

$O.12ar : 2m3+6m2+4m.$

$O.12ar - 6m2 - 4m : 2m3.$

$O.6a2 - 3m2 - m : O.12ar - 6m2 - 4m.$

$O.6a2 : O.12ar - 3m2 - 3m.$

$O.2a2 : O.4ar - m2 - m.$

$O.2a2+m2+m : O.4ar$ Quod &c.

2. $O.2a3+m3+2m2+m : O.6a2r.$
3. $O.6a4+3m4+8m3+6m2+m : O.24a3r.$
4. $O.12a3r+m3+3m2+2m : O.18a2r2.$
5. $O.6a5+3m5+10m4+10m3+2m2 : O.30a4r+m.$
6. $O.12a4r+m4+4m3+5m2+2m : O.24a3r2.$
7. $O.6a6+3m6+12m5+15m4+4m3 : O.36a5r+ 3m2+m.$
8. $O.12a5r+m5+5m4+8m3+4m2 : O.30a4r2.$
9. $O.18a4r2+m3+3m2+2m : O.24a3r3.$
10. $O.6a7+3m7+14m6+21m5+7m4+m : O.42a6r +7m3+3m2.$
11. $O.12a6r+m6+6m5+12m4+8m3 : O.36a5r2+m2 +2m.$
12. $O.18a5r2+m4+4m3+5m2+2m : O.30a4r3.$
13. $O.30a8+15m8+80m7+140m6+56m5+ 20m2+9m : O.240a7r+70m4+40m3.$
14. $O.60a7r+5m7+35m6+84m5+70m4 : O.210a6m$

O.210a6m+10m3+30m2+4m.

15. O.30a6r2+2m5+10m4+15m3+5m2:O.6a5r3 +2m.

16. O.120a5r3+20m2+16m: O.150a4r4+m5 +5m4.

17. O.10a9+5m9+30m8+60m7+28m6+20m3 +12m2: O.90a8r+42m5+30m4+3m.

18. O.60a8r+5m8+40m7+112m6+112m5+ 18m: O.240a7r2+20m4+80m3+7m2.

19. O.90a7r2+7m6+42m5+80m4+40m3: O.210a6r3+27m2+22m.

20. O.120a6r3+20m3+36m2+16m: O.180a5r4 +m6+6m5+5m4.

21. O.6a10+3m10+20m9+45m8+24m7+30m4 +24m3: O.60a9r+42m6+36m5+9m2+5m.

22. O.60a9r+5m9+45m8+144m7+168m6+72m2 +16m: O.270a8r2+36m5+180m4+24m3.

23. O.90a8r2+8m7+56m6+128m5+80m4+2m: O.240a7r3+63m3+61m2.

24. O.120a7r3+40m4+76m3+12m2: O.210a6r4 +m7+7m6+6m5+24m.

25. O.30a6r4+8m2+8m: O.36a5r5+m5+5m4 +4m3.

Et omninò in qualibet basi speciosæ tabulæ, proponi, & demonstrari potest, quæ, & qualiter acceptæ semitotę, species vicinas, aliqualiter acceptas, æquales faciant.

Ther. 11. *Prop.* 11.

DEmonstrare, quæ, & qualiter acceptæ sesquitotæ, species in eadem basi vicinas, aliqualiter acceptas, æquales faciant.

Sub hoc titulo vigintiquinque proponimus theoremata, ex quibus vnum demonstramus, ad ostensionem methodi.

1. $O.2a2+q2+2 : O.3ar+3q.$

Demonstr.

7. b. | $O.6a2 : 2q3 - 9q2 + 13q - 6.$
| $O.6a2+3q2+6 : 2q3 - 6q2 + 13q.$
7. b. | $O.6ar : q3 - 3q2 + 2q.$
| $O.12ar : 2q3 - 6q2 + 4q.$
| $O.12ar+9q : 2q3 - 6q2 + 13q.$
| $O.6a2+3q2+6 : O.12ar+9q.$
| $O.2a2+q2+2 : O.4ar+3q.$ Quod &c.

2. $O.2a3+q3+5q : O.6a2r+4q2+2.$
3. $O.6a4+3q4+30q2+6 : O.24a3r+16q3+23q.$
4. $O.12a3r+q3+2q : O.18a2r2+3q2.$
5. $O.6a5+3q5+50q3+31q : O.30a4r+20q4+58q2$
$+6.$
6. $O.12a4r+q4+5q2 : O.24a3r2+4q3+2q.$
7. $O.6a6+3q6+75q4+93q2+6 : O.36a5r+24q5$
$+116q3+37q.$
8. $O.12a5r+q5+8q3 : O.30a4r2+5q4+4q2.$
9. $O.18a4r2+q3+2q : O.24a3r3+3q2.$

10. O.

10. 0.6a7 + 3q7 + 105q5 + 217q3 + 41q : 0.42a6r + 28q6 + 203q4 + 129q2 + 6.

11. 0.12a6r + q6 + 12q4 + 2q : 0.36a5r2 + 6q5 + 8q3 + q2.

12. 0.18a5r2 + q4 + 5q2 : 0.30a4r3 + 4q3 + 2q.

13. 0.30a8 + 15q8 + 700q6 + 2170q4 + 820q2 + 30 : 0.240a7r + 160q7 + 1624q5 + 1720q3 + 231q.

14. 0.60a7r + 5q7 + 84q5 + 30q2 : 0.210a6r2 + 35q6 + 70q4 + 10q3 + 4q.

15. 0.90a6r2 + 6q5 + 45q3 : 0.180a5r3 + 30q4 + 15q2 + 6q.

16. 0.120a5r3 + 5q4 + 16q : 0.150a4r4 + q5 + 20q2.

17. 0.10a9 + 5q9 + 300q7 + 1302q5 + 820q3 + 93q : 0.90a8r + 60q8 + 812q6 + 1290q4 + 348q2 + 10.

18. 0.60a8r + 5q8 + 112q6 + 80q3 : 0.240a7r2 + 40q7 + 112q5 + 20q4 + 7q2 + 18q.

19. 0.180a7r2 + 14q6 + 105q4 + 44q : 0.420a6r3 + 84q5 + 80q3 + 54q2.

20. 0.120a6r3 + 6q5 + 36q2 : 0.180a5r4 + q6 + 5q4 + 20q3 + 16q.

21. 0.6a10 + 3q10 + 225q8 + 1302q6 + 1230q4 + 279q2 + 6 : 0.60a9r + 40q9 + 696q7 + 1548q5.

22. 0.60a9r + 5q9 + 144q7 + 180q4 + 16q : 0.270a8r2 + 45q8 + 168q6 + 36q5 + 24q3 + 72q2.

23. 0.90a8r2 + 8q7 + 128q5 + 61q2 + 2q : 0.240a7r3 + 56q6 + 80q4 + 63q3.

24. 0.

24. $O.120a7r3+7q6+7q3 : O.210a6r4+q7+6q5+40q4+12q2+24q.$

25. $O.30a6r4+5q4+8q : O.36a5r5+q5+4q3+8q2.$

Possunt hæc, & alia huiusmodi, sub hoc titulo demonstrari, in infinitum, iuxta traditam methodum: vt omninò pateat, quæ, & qualiter acceptæ sesquitotæ, species in eadem basi vicinas, aliqualiter acceptas æquales faciant.

Theor. 12. *Prop.* 12.

Demonstrare, quæ, & qualiter acceptæ primi lateris species, binas quasque species in eadem basi vicinas, aliqualiter acceptas, æquales faciant.

Sub hoc etiam titulo, vigintiquinque proponimus theoremata, ex quibus vnum demonstramus, ad ostensionem methodi.

1. $O.a2+O.a : O.2ar.$ Demonstratum est in 8. *h.*
2. $O.2a3+O.3a2+O.a : O.6a2r.$ Demonstr. ibidem.
3. $O.a4+O.2a3+O.a2 : O.4a3r.$ Demonstr. ibidem.
4. $O.4a3r+O.a2+O.a : O.6a2r2.$

Demonstr.

8. *h.* | $O.4a3r : O.a4+O.2a3+O.a2.$
| $O.4a3r+O.a2+O.a : O.a4+O.2a3+O.2a2+O.a.$
8. *h.* | $O.6a2r2 : O.a4+O.2a3+O.2a2+O.a.$
| $O.4a3r+O.a2+O.a : O.6a2r2.$ Quod &c.

5. $O.6a5+O.15a4+O.10a3 : O.30a4r+O.a.$
6. $O.6a4r+O.2a3+O.3a2+O.a : O.12a3r2.$
7. $O.2a6+O.6a5+O.5a4 : O.12a5r+O.a2.$

8. O.

8. O.12a5r+O.5a4+O.10a3+O.4a2 : O.30a4r2 + O.a.

9. O.30a4r2 + O.8a5 + O.5a2 : O.40a3r3 + O.3a.

10. O.6a7 + O.21a6 + O.21a5 + O.a : O.42a6r + O.7a3.

11. O.12a6r + O.6a5 + O.15a4 + O.8a3 : O.36a5r2 + O.3a2 + O.2a.

12. O.9a5r2 + O.2a3 + O.3a2 + O.a : O.15a4r3.

13. O.3a8 + O.12a7 + O.14a6 + O.2a2 : O.24a7r + O.7a4.

14. O.12a7r + O.7a6 + O.21a5 + O.14a4 + O.a : O.42a6r2 + O.7a3 + O.6a2.

15. O.6a6r2 + O.2a4 + O.4a3 + O.a2 : O.12a5r3 + O.a.

16. O.24a5r3 + O.4a2 + O.5a : O.30a4r4 + O.a4 + O.2a3.

17. O.10a9 + O.45a8 + O.60a7 + O.20a3 : O.90a8r + O.42a5 + O.3a.

18. O.30a8r + O.20a7 + O.70a6 + O.56a5 + O.10a2 + O.9a : O.120a7r2 + O.35a4 + O.40a3.

19. O.90a7r2 + O.42a5 + O.105a4 + O.40a3 : O.210a6r3 + O.20a2 + O.22a.

20. O.120a6r3 + O.20a3 + O.45a2 + O.16a : O.180a5r4 + O.6a5 + O.15a4.

21. O.2a10 + O.10a9 + O.15a8 + O.10a4 : O.20a9r + O.14a6 + O.3a2.

22. O.20a9r + O.15a8 + O.60a7 + O.56a6 + O.20a3 + O.24a2:

+0.2442 : 0.90a8r2+0.42a5+0.60a4+0.3a.

23. 0.90a8r2+0.56a6+0.168a5+0.80a4+0.27a : 0.240a7r3+0.120a3+0.61a2.

24. 0.120a7r3+0.40a4+0.115a3+0.12a2 : 0.210a6r4+0.7a6+0.21a5+0.49a.

25. 0.30a6r4+0.8a2+0.13a : 0.36a5r5+0.5a4 +0.10a3.

Et alia deinceps proponi possunt, & demonstrari: & vniuersaliter possibile est demonstrare, quæ, & qualiter acceptæ primi lateris species, binas quasque species, in eadem basi vicinas, aliqualiter acceptas, æquales faciant.

Theor. 13. Prop. 13.

IN tabula subquadratrice cuiusque numeri, & in qualibet basi, subquadratrices, & æque ordinata tota, totam componunt, vnitate plus ordinatam.

Hypoth.

In tabula subquadratrice, in secunda basi, sint subquadratrices $O.a2$, $O.2a3$; $O.r2$; sitque tota secunda, $t2$; tota tertia, $t3$.

Dico $O.a2+O.2ar+O.r2+t2 : t3$.

Demonstr.

def. 6. p. | $u; t : t2; t3$.

2. p. | $u; t-u : t2; t3-t2$.

Ergo $t3-t2$, est toties $t2$, quoties est $t-u$: idest, quoties relinquitur ipse numerus t, vnitate dempta. Sed cuiusque numeri tot sunt abscissiones, quotus ipse relinquitur,

quitur, vnitate dempta: nam binarij, vna tantùm est abscissio, qua vnitas abscinditur; ternarij, duæ, quibus vnitas, & binarius abscinduntur; & sic deinceps; ergo $t3 - t2$, est toties $t2$, quot sunt ipsius t abscissiones.

Pro singulis autem abscissionibus.

6. p. | $a2 + 2ar + r2 : t2$.
| Ergo pro omnibus.
| $O.a2 + O.2ar + O.r2 : t3 - t2$.
| Ergo communiter addendo $t2$.
| $O.a2 + O.2ar + O.r2 + t2 : t3$. Quod &c.

Quare &c.

Theorema 14. Prop. 14.

TOta quælibet, est æqualis quadratrici, in primo latere, in basi proximè minùs ordinata iacenti, vnà cum alijs massis, in primo latere, in basibus inferioribus, & vertice, acceptis aliqualiter, & vnitate.

Hypoth.

Esto tota tertia $t3$.

Dico $t3$, esse æqualem quadratrici in primo latere, in secunda basi, vna cum alijs, &c.

Demonstr.

4. h. | $t3 : O.3a2$, vna cum alijs, &c.
def. 8. p. | $a2$ est in primo latere in secunda basi tabulæ proportionalium.
def. 11. p | $a2$ est ibidem in tabula nominum.
def. 9. 2. | $O.a2$ est ibidem in tabula speciosa.

def.11.2. | O.a2 eſt ibidem in tabula ſubquadratrice.
def.13.2. | O.3a2 eſt ibidem in tabula quadratrice.
| t3 eſt æqualis quadratrici, in primo latere, in ſecunda baſi, vna cum aliis, &c. Quod &c.

Quare &c.

Theorema 15. Prop. 15.

QVælibet ſubquadratrix, in primo latere, vna cum tota æque ordinata, atque ſua baſis, eſt æqualis ſubquadratrici, in ſecundo latere, in ſua baſi iacenti, vna cum maſſis, in ſecundo latere, in baſibus inferioribus, acceptis aliqualiter, & tota.

Hypoth.

Eſto ſubquadratrix O.a3, in primo latere, in tertia baſi. Dico O.a3, vnà cum tota tertia, æqualem eſſe ſubquadratrici, in ſecundo latere, in tertia baſi iacenti, vna cum alijs, &c.

Præpar.

Aſſumatur ſpecies, in ſecundo latere, in quarta baſi, ſecunda, & quartultima, O.a3r.

Demonſtr.

| O.a3r incrementa ſunt æqualia.
2. h. | O.a3, vna cum &c: O.3a2r, vna cum alijs &c.
7. p. | a2r eſt ſecunda in tertia baſi tabulæ proportionalium.
def.11.p. | 3a2r eſt ibidem in tabula nominum.
def.11.2. | O.3a2r eſt ibidem in tabula ſubquadratrice.

O.a3,

| $O.a3$, vna &c. eſt æqualis ſubquadratrici, in ſecundo latere, in tertia baſi, vna cum alijs, &c.
| Quod &c.

Quare &c.

Theor. 16. *Prop.* 16.

SI aliquot quantitatum, ſecunda ad tertiam, fuerit ſicut prima cum vltima ad ſecundam dempta vltima; & tertia ad quartam, ſicut prima cum dupla vltima ad ſecundam dempta dupla vltima; & quarta ad quintam ſicut prima cum tripla vltima ad ſecundam dempta tripla vltima; & ſic deinceps vſque ad vltimam: erit prima cum ſecunda ad ſecundam cum tertia, ſicut prima cum vltima ad ſecundam; & ſecunda cum tertia ad tertiam cum quarta, ſicut prima cum dupla vltima ad ſecundam dempta vltima; & tertia cum quarta ad quartam cum quinta, ſicut prima cum tripla vltima ad ſecundam dempta dupla vltima; & ſic deinceps.

Hypoth.

Sint aliquot quantitates $a, b, c, d, e.$

$b; c : a+e; b-e.$

$c; d : a+2e; b-2e.$

$d; e : a+3e; b-3e.$

Dico $a+b;\ b+c : a+e;\ b.$

Demonſtr.

hypoth. | $a+e;\ b-e : b; c.$
| conuertendo, componendo, & permutando.

2. p. | $a+b;\ b+c:\ a+e;\ b.$ Quod &c.

Dico $b+c;\ c+d:\ a+2e;\ b-e.$

Demonstr.

hypoth.	$b;\ c:\ a+e;\ b-e.$
2. p.	$b+c;\ c:\ a+b;\ b-e.$
hypoth.	$c;\ d:\ a+2e;\ b-2e.$
2. p.	$c;\ c+d:\ a+2e;\ a+b.$
p. p.	$b+c;\ c+d:\ a+2e;\ b-2e.$ Quod &c.

Dico $c+d;\ d+e:\ a+3e;\ b-2e.$

Demonstr.

hypoth.	$c;\ d:\ a+2e;\ b-2e.$
2. p.	$c+d;\ d:\ a+b;\ b-2e.$
hypoth.	$d;\ e:\ a+3e;\ b-3e.$
2. p.	$d;\ d+e:\ a+3e;\ a+b.$
p. p.	$c+d;\ d+e:\ a+3e;\ b-2e.$ Quod &c.

Quare &c.

Theor. 17. *Prop.* 17.

SI aliquot quantitatum, ſecunda ad tertiam fuerit, ſicut prima cum vltima ad ſecundam dempta vltima; & tertia ad quartam, ſicut prima cum dupla vltima ad ſecundam dempta dupla vltima; & ſic deinceps vſque ad vltimam: fuerit autem & prima æqualis vltimæ: erunt totidem quantitates & vna amplius, prima ſeorſim, prima cum ſecunda, ſecunda cum tertia, tertia cum quarta, & deinceps binę aggregatæ, & demum ſeorſim vltima; quarum ſecunda ad tertiam, eſt vt prima cum vltima ad ſecundam

dempta

dempta vltima; & tertia ad quartam, vt prima cum dupla vltima ad secundam dempta dupla vltima; & sic deinceps vsque ad vltimam.

Hypoth.

Sint tres quantitates a, b, c, quarum
$b; c : a + c; b - c$.
$a : c$.

Dico quatuor quantitates esse a, $a + b$, $b + c$, c, quarum
$a + b; b + c : a + c; a + b - c$.

Demonstr.

16.h.	$a + b; b + c : a + c; b$.
hypoth.	$a : c$.
	$a + b - c : b$.
	$a + b; b + c : a + c; a + b - c$. Quod &c.

Dico $b + c; c : a + 2c; a + b - 2c$.

hypoth.	$b; c : a + c; b - c$.
2.p.	$b + c; c : a + b; b - c$.
hypoth.	$b + c : a + b$.
	$c : b - c$.
	$2c : b$.
	$a + 2c : a + b$.
	$a + b - 2c : b - c$.
	$b + c; c : a + 2c; a + b - 2c$. Quod &c.

Quare &c.

Theor.

Theor. 18. Prop. 18.

IN vnaquaque basi tabulæ multiplicium, prior quantitas ad posteriorem vicinam, est vt ordo prioris à prima, ad ordinem posterioris ab vltima.

Demonstr.

Quoniam in secunda basi tabulæ multiplicium, sunt tres quantitates, quarum secunda ad tertiam, est vt prima cum tertia ad secundam dempta tertia; & prima est æqualis tertiæ; & in tertia basi, sunt ordinatæ quatuor quantitates ex secunda basi desumptæ, prima seorsim, prima & secunda, secunda & tertia, & tertia seorsim: ergo etiam in tertia basi, secunda quãtitas ad tertiam, est vt prima cum quarta ad secundam dempta quarta; & tertia ad quartam, est vt prima cum dupla quarta, ad secundam dempta dupla quarta: & sic deinceps ostendetur in singulis basibus.

def. 10. p. *17. h.*

Est autem in vnaquaque basi tabulæ multiplicium, prima quantitas vnitas, & vltima vnitas: & secunda quantitas est ordo basis, idemque ordo ipsius quantitatis ab vltima. Ergo in quarta basi, prima quantitas, quæ est quintultima, ad secũdam, quæ est quartultima, est vt vnitas ad quaternariũ: secunda ergo ad triultimam, est vt binarius ad ternarium; tertia ad penultimam, vt ternarius ad binarium; quarta ad vltimam, vt quaternarius ad vnitatem. Similiter ostendetur in singulis basibus.

def. 10. p. *def. p. p.*

Quare &c. *Theor.*

Theor. 19. *Prop.* 19.

PRoportionalium, & multiplicium tabulis congruentibus, quæque proportionalis, habet numeros denominatores, reciprocè proportionales, vt in suis cornibus multiplices.

Demonstr.

Proportionalium assumatur bitertia, cuius denomina-
7. p. tores binarius, & ternarius. Est autem bitertia in quinta basi quarta tritultima: cuius cornua sunt in
def.p.p. quarta basi, alterum in quarto, alterum in tritultimo latere: idest alterum cornu est, in quarta basi,
def.p.p. quarta quantitas; alterum, tritultima. Sed in quarta basi, quarta est penultima, & tritultima est ter-
18. h. tia: & in tabula multiplicium, tertia ad penultimã, est vt ternarius ad binarium: ergo cum bitertiæ denominatores sint, prior binarius, & posterior ternarius; eiusdem in cornibus multiplices reciprocè sunt proportionales, prior ad posteriorem, vt ternarius ad binarium. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 20. *Prop.* 20.

IN tabula specierum, in eadem basi, vicinæ species, multiplicatæ per numeros suorum ordinum, prioris à prima, & posterioris ab vltima, sunt æquales, additis tamen vtrimque massis, in inferioris ordinis basibus, & in earum-

dem

dem lateribus, versus tabulæ verticem diuergentibus, aliqualiter acceptis, atque totis minùs ordinatis, quàm sit ipsa basis.

Hypoth.

Sint species in quinta basi, secunda quintultima, & tertia quartultima.

Dico duplam secundam quintultimam, æqualem esse quadruplæ tertiæ quartultimæ, additis tamen vtrimque alijs &c.

Præpar.

6. p. Assumatur, in sexta basi, species tertia quintultima, cuius denominatores numeri, quaternarius, & binarius.

Demonstr.

Tertiæ & quintultimæ speciei æqualia sunt incrementa:
2. h. alterum ex massis compositum in tertio latere, multiplicatis per numeros quartæ basis multiplicium, quaternarium, & reliquos; quarum vna est in quinta basi quartultima, per quaternarium multiplicata: alterum ex massis in quintultimo latere,
2. h. multiplicatis per numeros secundæ basis multiplicium, nempè binarium; quarum vna est, in quinta basi, secunda, multiplicata per binarium: & reliquæ massæ, in vtroque incremento, sunt inferiores, & demum totæ inferiores, quàm quinta. Ergo dupla secunda quintultima, est æqualis quadru-

druplæ tertiæ quartultimæ, additis vtrimque alijs &c. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 21. *Prop.* 21.

IN tabula ſubquadraticum, in eadem baſi, ſubquadratrices vicinæ ſunt æquales, additis tamen vtrimque maſſis, in inferioris ordinis baſibus, & in earumdem lateribus, verſus tabulæ verticem diuergentibus, aliqualiter acceptis, atque totis, minùs ordinatis, quàm ſit ipſa baſis. Similiter & vicinæ quadratrices ſunt æquales, additis tamen &c.

Hypoth.

Sint ſubquadratrices, in quinta baſi, vicinæ, producta ex ſecunda quintultima ſpecie per ſecundum quintultimum multiplicem, & producta ex tertia quartultima ſpecie, per tertium quartultimum multiplicem, *O.5a4r*, & *O.10a3r2*.

Dico *O.5a4r*, additis &c: *O.10a3r2*, additis &c.

Præpar.

Aſſumatur, in ſexta baſi, ſpecies tertia quintultima, cuius denominatores, quaternarius, & binarius, nempè *O.a4r2*: quibuſcum numeris, reciprocè proportionales ſunt multiplices, in eiuſdem ſpeciei cornibus iacentes, 5 ad 10. Fiat itaque, vt 2 ad 5, ita *O.2a4r*, vna cum alijs &c. ad *O.5a4r*, vna cum alijs &c. item vt 4 ad 10, ita *O.4a3r2*, vnà cum alijs &c. ad *O.10a3r2*, vna cum alijs &c.

19. b. post. vn.

K *Demonſtr.*

Demonstr.

20.b. | O.2a4r, vna cum alijs &c: O.4a3r2, vna cũ alijs &c.
2.p. | O.2a4r, vna cum alijs &c; O. 4.13r2, vna cum &c: O.5a4r, vna cum &c; O.10a3r2, vna cum &c.
9.5. | O.5a4r, vna cum &c: O.10a3r2, vna cum &c. Quod &c.

Dico O. 30a4r, vna cum &c: O. 60a3r2, vna cum &c.

Præpar.

post.vn. | O. 5a4r, vna cum &c. & O.10 a3r2, vna cum &c. sextuplicẽtur, & fiant O30a4r, vna cum &c. & O.60a3r2. vna &c.

Demonstr.

sup. | O.5a4r, vna &c: O.10a3r2, vna &c.
9.5. | O.30a4r. vna &c: O.60a3r2, vna &c. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 22. Prop. 22.

QVælibet quadratrix, est æqualis totæ vnitate plus ordinatæ, demptis, additisque aliqualiter acceptis totis, non plus ordinatis, quàm sit eius basis.

Demonstr.

Patet inductione per 5. h.

21.b. | Deinde sic. Quælibet quadratrix, est æqualis quadratrici, sibi in eadem basi vicinæ, additis vtrimque alijs inferiorum basium speciebus, aliqua-
21.b. | liter acceptis, & totis. Et quadratrix vicina, alteri vicinæ est æqualis, additis vtrimque alijs infe-

rio-

15. *h.* riorum basium speciebus, & totis: & demum pri-
14. *h.* mæ quadratrici eiusdem basis: & prima quadratrix vna cum alijs primi lateris quadratricibus inferiorum basium, & vnitate, est æqualis totæ, vnitate plus ordinatæ, quàm sit ipsa basis. Similiter
sup. alię inferiorum basium species, alijs speciebus, & demum totis, sunt æquales, non plus ordinatis,
5. *h.* quàm sit basis quadratricis primò sumptæ. Quare demum quadratrix primò sumpta, est æqualis totæ vnitate plus ordinatæ, quàm sit eius basis, demptis, additisque aliqualiter acceptis totis, non plus ordinatis, quàm sit eius basis.

Theor. 23. Prop. 23.

IN tabula multiplicium, summa numerorum cuiusque basis, est tota potestas binarij, quotus est ordo basis.

Demonstr.

Nam in tabula proportionalium, si rationalis, & radices
def. 8. p. fuerint æquales inter se: etiam reliquæ omnes quantitates, & rationali, & radicibus, & ad inuicem æquales erunt: quia ratio æqualitatis quantumlibet multiplicata, & secum ipsa composita, semper est æqualitas. Quare si rationalis, & radices fuerint vnitates: omnes proportionales erunt
def. 11. p. vnitates. eritque tabula nominum, eadem, quæ
def. 10. p tabula multiplicium: quia vnitas non multiplicat et cuiusque basis nominum summa, eadem erit

8. p. quæ ſumma eiuſdem baſis multiplicium. Sed cuiuſque baſis nominum ſumma eſt poteſtas aggregati radicum, æqueordinata cum baſi. Ergo cuiuſque baſis multiplicium ſumma, eſt poteſtas aggregati vnitatum, ideſt binarij, æqueordinata cum baſi.

Theor. 24. *Prop.* 24.

POteſtas binarij multiplicata per ſuum ordinis numerum, minor eſt æqueordinata poteſtate ternarij.

Hypoth.

Eſto binarius *b*, ternarius *t*. Conſtat *b*, minorem eſſe, quàm *t*.

Dico 2*b*2, minorem eſſe, quàm *t*2.

3*b*3, minorem, quàm *t*3.

4*b*4, minorem quàm *t*4. Et deinceps.

Demonſtr.

def.8.p. | *t*; *b*: *t*2; *tb*: *tb*; *b*2 : *t*2 — *tb*; *tb* — *b*2.

& 2. p. | *t*, *b*, ſunt numeri inter ſe primi.

23. 7. | *t*, *b*, ſunt minimi in ſua ratione.

| *t*2 — *tb*, non eſt minor, quàm *t*.

| *tb* — *b*2, non eſt minor, quàm *b*.

| *t*2 — *b*2, non eſt minor quàm *t*+*b*.

hypoth. | *b*, eſt minor, quàm *t*.

| 2*b*, eſt minor, quàm *t*+*b*.

| 2*b*, eſt minor, quàm *t*2 — *b*2.

hypoth. | 2, eſt *b*.

2*b*,

2b, eſt b2.
b2, eſt minor, quàm t2 -- b2.
2b2, eſt minor, quàm t2. Quod &c.
2b2, eſt b3.
b3, eſt minor, quàm t2.
3b3, eſt minor, quàm 3t2.
3t2, eſt t3.
3b3, eſt minor, quàm t3. Quod &c.
3b4, eſt minor, quàm 2t3.
ſup. b3, eſt minor, quàm t2.
hypoth. b2, eſt minor, quàm t.
b4, eſt minor, quàm t3.
4b4, eſt minor, quàm 3t3.
3t3, eſt t4.
4b4, eſt minor, quàm t4. Quod &c.

Et ſimiliter deinceps oſtendetur in infinitum. Quare &c.

Theorema 25. Prop. 25.

IN tabula multiplicium, quiſque numerus multiplicans numerum vnitate maiorem, quàm ſit ordo ſuæ baſis, facit numerum minorem tota poteſtate ternarij, quotus eſt numerus multiplicatus.

Hypoth.

Eſto, numerus a, in tabula multiplicium, in quinta baſi: & eſto ternarius t.

Dico 6a, minorem eſſe, quam t6.

Præpar.

Præpar.

Accipiatur binarius b.

Demonstr.

32. h. Numerus a, & alij quintæ basis, componunt $b5$.
def.6.p. Ergo a, minor est, quàm $b5$. Sed $b5$, minor est, quàm $b6$. Ergo a, multò minor est, quàm
24. h. $b6$. Ergo $6a$, minor est quàm $6b6$. Sed $6b6$, minor est, quàm $t6$. Ergo $6a$, minor est quàm $t6$. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 26. Prop. 26.

QVælibet quadratrix, pro radice binario, minor est, quàm sesquitota; maior, quàm semitota, vnitate plus ordinatæ, quàm sit eius basis. Porrò quadratrix iacens in vertice tabulæ, est æqualis semitotæ.

Hypoth.

Esto, pro radice binario, quælibet quadratrix a, in quarta basi.

Dico a maiorem esse, quàm $m5$; & minorem, quàm $q5$.

6. h. Porrò constat quod $O.u$, pro quacunque radice, est æqualis ipsi m.

Præpar.

def.8.h. Pro radice binario, vnica tantum est abscissio, qua vnitas abscinditur, & vnitas relinquitur: &
def.8.p. vnica tabula proportionaliũ, in qua omnes propor-

def.8.b. portionales ſunt vnitates: & ſynonymæ proportionales
def.10.b. ſolitariæ: vnde tabula ſpecierum eſt eadem,
def.11.p. quæ proportionalium ex vnitatibus. Deinde
def.11.b. vnica eſt tabula nominum, eadem, quæ multiplicium: vnde tabula ſubquadratricum, eadem eſt, quæ nominum, & multiplicium. Accipiatur itaque ſubquadratrix *b*, in quarta baſi, quadratrici *a*, ſynonyma.

Demonſtr.

præpar. *b*, eſt in tabula multiplicium, in quarta baſi.
def.13b. *a* : 5 *b*.
def.19.b. pro binario, *m*, eſt vnitas.
def.6.p. *m* 5, eſt vnitas.
def.10.p 5 *b*, eſt maior vnitate.
a, eſt maior, quàm *m* 5. Quod &c.
def.18.b Pro binario, *q*, eſt ternarius.
25.b. 5 *b*, eſt minor, quàm *q* 5.
a, eſt minor, quàm *q* 5. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 27. Prop. 27.

QVælibet poteſtas à binario, maior eſt numero ſui ordinis.

Hypoth.

Eſto binarius *b*.

Demonſtr.

Vnitas eſt minor, quàm *b*. ergo binarius, minor eſt, quàm

quàm 2 *b*: sed 2*b*: est *b*2: ergo binarius, minor est, quã *b*2. Ergo vnitas, multò minor est, quàm *b*2. Ergo ternarius, minor est, quàm 2*b*2. Sed 2*b*2, est *b*3. Ergo ternarius, minor est, quàm *b*3. Et sic deinceps ostendetur, quòd potestas à binario, maior est, quàm sui ordinis numerus.

Theor. 28. *Prop*. 28.

QVælibet quadratrix primi lateris, pro radice binario, minor est, quàm potestas binarij, vnitate plus ordinata, quàm sit eius basis.

Hypoth.

Esto, in primo latere, in quarta basi, quadratrix *a*, pro radice binario: & esto binarius *b*.

Dico *a*, minorem esse, quàm *b*5.

Præpar.

Accipiatur in primo latere, in quarta basi, subquadratrix *c*, pro radice binario.

Demonstr.

ex 26.*b*	*c* : *u*.
def.11.*b*	*a* : 5*c*.
	a : 5.
27. *b*.	5, minor est, quàm *b*5.
	a, minor est, quàm *b*5. Quod &c.

Quare &c.

Theor.

Theor. 29. Prop. 29.

Cviuslibet quadratricis, primi vel vltimi lateris, incrementum, minus est incremento totæ, vnitate plus ordinatæ, quàm sit eius basis: & quælibet quadratrix, primi vel vltimi lateris, minor est quàm tota, vnitate plus ordinata: & sesquiquadratrix, minor est quàm sesquitota.

Meth. Demonstr.

Tria proposita, oportet primùm demonstrare, in prioribus basibus tabulæ, deinde in posterioribus.

Dico $O.2a$ incrementum, minus esse incremento $t2$: & $O.2a$, minorem esse, quàm $t2$: & sesqui-$O.2a$, minorem esse, quàm $q2$.

Demonstr.

2. *b.* | $O.2a$ incrementum est $O.2+2$.
8. *p.* | $t2$ incrementum est $2t+u$.
2. *b.* | $O.2: 2t+-2$.
| $O.2+2: 2t$.
| $O.2+2$, minor est, quàm $2t+u$.
| $O.2a$ incrementum, minus est incremento $t2$. Quod &c.
28. *b.* | $O.2a$, pro binario, minor est, quàm $t2$.
| $O.2a$, pro ternario, minor est, quàm $t2$.
| Similiter, pro quaternario, & pro singulis numeris demonstrabitur, quòd $O.2a$ minor est, quàm $t2$: & sesqui-$O.2a$, minor est, quàm $q2$. Quod &c.

Dico $O.3a2$ incrementum, minus esse incremento $t3$: & $O.3a2$, minorem esse, quàm $t3$: & sesqui-$O.3a2$, minorem esse, quàm $q3$.

Demonstr.

2.*b.* | $O.3a2$ incrementum, est $O.5a+O.3+3$.
8. *p.* | $t3$ incrementum, est $3t2+3t+u$.
sup. | $O.6a$, minor est, quàm $3t2$.
ex sup. | $O.3+3$, minor est, quàm $3t+u$.
| $O.3a2$ incrementum, minus est incremento $t3$. Quod &c.
28. *b.* | $O.3a2$, pro binario, minor est, quàm $t3$.
| $O.3a2$, pro ternario, minor est quàm $t3$: necnon pro alio quolibet numero: & sesqui-$O.3a2$, minor est, quàm $q3$. Quæ &c:

Dico $O.4a3$ incrementum, minus esse incremento $t4$: & $O.4a3$, minorem esse, quàm $t4$: & sesqui-$O.4a3$, minorem, quàm $q4$.

Demonstr.

2. *b.* | $O.4a3$ incrementum, est $O.12a2+O.12a+O.4+4$.
8. *p.* | Incrementum $t4$, est $4t3+6t2+4t+u$.
sup. | $O.12a2$, minor est, quàm $4t3$.
sup. | $O.12a$, minor est, quàm $6t2$.
ex sup. | $O.4+4$, minor est, quàm $4t+u$.
| Incrementum $O.4a3$, minus est incremento $t4$. Quod &c.
28. *b.* | $O.4a3$, pro binario, minor est, quàm $t4$.

$O.4a3$,

O.4*a*3, pro ternario, minor est, quàm *t*4: necnon pro quaternario, & pro alijs deinceps numeris: & sesqui-*O*.4*a*3, minor est, quàm *q*4. Quæ &c.

Similiter ostendetur de omnibus primi, & vltimi lateris quadratricibus.

Quare &c.

Theor. 30. *Prop.* 30.

CViuslibet quadratricis incrementum, maius est incremento semitotæ, vnitate plus ordinatæ, quàm sit eius basis; & minus est incremento sesquitotæ, pariter plus ordinatæ. Deinde quælibet quadratrix, maior est, quàm prædicta semitota; & minor, quàm prædicta sesquitota.

Meth. Demonstr.

Quatuor proposita primùm demonstrare oportet, in prioribus basibus tabulæ, deinde in posterioribus.

Dico incrementum *O*.2*a*; maius esse, incremento *m*2; & minus esse, incremento *q*2: & *O*.2*a*, maiorem esse, quàm *m*2; minorem, quàm *q*2.

Demonstr.

2. *b.* | Incrementum *O*.2*a*, est *O*2+2.
8. *p.* | Incrementum *m*2, est 2*m*+*u*.
8. *p.* | Incrementum *q*2, est 2*q*+*u*.
7. *b.* | *O*.2 : 2*m*.
| *O*.2+2, est maior, quàm 2*m*+*u*.
| Incrementum *O*.2*a*, est maius incremento *m*2.

Quod &c.

def.19. & 18.h. | $O.2+2 : 2m+2 : 2t$.
| $O.2+2$, est minor, quàm $2q$.
| $O.2+2$, est minor, quàm $2q+u$.
| Incrementum $O.2a$, est minus incremento $q2$. Quod &c.

26. b. | $O.2a$, pro binario, est maior, quàm $m2$; minor, quàm $q2$.
| $O.2a$, pro ternario, est maior, quàm $m2$; minor, quàm $q2$: item pro quaternario, & pro reliquis numeris. Quod &c.

Dico $O3a2$ incrementum, maius esse incremento $m3$; minus incremento $q3$: & $O.3a2$, maiorem esse, quàm $m3$; minorem, quàm $q3$.

Demonstr.

6. b. | Incrementum $O.3a^2$, est $O.6a+O.3+3$.
8. p. | Incrementum $m3$, est $3m_2+3m+u$.
8. p. | Incrementum $q3$, est $3q^2+3q+u$.
sup. | $O6a$, est maior, quàm $3m^2$.
sup. | $O.3 : 3m$.
| $O.3+3$, maior est. quàm $3m+u$.
| Incrementum $O.3a2$, est maius incremento $m3$. Quod &c.
sup. | $O.6a$, est minor, quàm $3q^2$.
sup. | $O.3+3$, est minor, quàm $3q+u$.
| Incrementum $O.3a2$, est minus incremento $q3$. Quod &c.

26. b. | $O.3a2$, pro binario, est maior, quàm $m3$; minor, quàm $q3$.

$O.3a^2$,

$O.3a2$, pro ternario, eſt maior, quàm $m3$; minor; quàm $q3$: necnon pro quaternario, & reliquis deinceps numeris. Quod &c.

Dico $O.6ar$ incrementum, maius eſſe incremento $m3$; minus incremento $q3$: & $O.6ar$, maiorem eſſe, quàm $m3$; minorem, quàm $q3$.

Demonſtr.

2. *b.*	Incrementum $O6ar$, eſt $O.6r+6t$.
8. *p.*	Incrementum $m3$, eſt $3m2+3m+u$.
8. *p.*	Incrementum $q3$, eſt $3q2+3q+u$.
	$O.6r$, maior eſt, quàm $3m2$.
	$6t$, maior eſt, quàm $3m+u$.
	Incrementum $O.6ar$, maius eſt incremento $m3$. Quod &c.
29.*b.*	$O2r+2t$, minor eſt, quàm $q2$.
	$O6r+6t$, minor eſt, quàm $3q2+3q+u$.
	Incrementum $O.6ar$, minus eſt incremento $q3$. Quod &c.
26.*b.*	$O.6ar$, pro binario, eſt maior, quàm $m3$; minor, quàm $q3$.
	$O.6ar$, pro ternario, & pro reliquis numeris, eſt maior, quàm $m3$, minor, quàm $q3$. Quod &c.

Dico $O.4a3$ incrementum, maius eſſe incremento $m4$; minus incremento $q4$: & $O.4a3$, maiorem eſſe, quàm $m4$; minorem, quàm $q4$.

De-

Demonstr.

2.h. Incrementũ $O.4a3$, est $O.12a2+O.12a+O.4+4$.
8.p. Incrementum $m4$, est $4m3+6m2+4m+u$.
8.p. Incrementum $q4$, est $4q3+6q2+4q+u$.
sup. $O.12a2$, maior est, quàm $4m3$.
sup. $O.12a$, maior, quàm $6m2$.
sup. $O.4 : 4m$.
4 maior, quàm u.
Incrementum $O.4a3$, maius incremento $m4$. Quod &c.
sup. $O.12a2$, minor est, quàm $4q3$.
sup. $O.12a$, minor, quàm $6q2$.
sup. $O.4+4 : 4m+4 : 4t$.
$O.4+4$, minor est, quàm $4q+u$.
Incrementum $O.4a3$, minus incremento $q4$. Quod &c.
26.h. $O.4a3$, pro binario, maior est, quàm $m4$; minor, quàm $q4$.
$O.4a3$, pro ternario, & pro alio quolibet numero, maior est, quàm $m4$; minor quã $q4$. Quod &c.

Dico $O.12a2r$ incrementum, maius esse incremento $m4$; minus incremento $q4$: & $O.12a2r$, maiorem esse, quàm $m4$; minorem, quàm $q4$.

Demonstr.

2.h. Incrementum $O.12a2r$, est $O.24ar+O.12r+12t$.
8.p. Incrementum $m4$, est $4m3+6m2+4m+u$.

In-

8.p. | Incrementum $q4$, est $4q3 + 6q2 + 4q + u$.
sup. | $O.24ar$, maior est, quàm $4m3$.
sup. | $O.12r$, maior, quàm $6m2$.
| $12t$, maior, quàm $4m + u$.
| Incrementum $O.12a2r$, maius est increm\~eto $m4$. Quod &c.
sup. | $O.24ar$, minor est, quàm $4q3$.
29.b. | $O.12r + 12t$, minor, quàm $6q2 + 4q + u$.
| Incrementum $O.12a2r$, minus incremento $q4$. Quod &c.
26.b. | $O.12a2r$, pro binario, maior, quàm $m4$; minor est, quàm $q4$.
| $O.12a2r$, pro ternario, maior est, quàm $m4$; minor, quàm $q4$, necnon quo alio quolibet numero. Quod &c.

Dico $O.5a4$, incrementum, maius esse increm\~eto $m5$; minus incremento $q5$: & $O.5a4$, maiorem esse, quàm $m5$; minorem, quàm $q5$.

Demonstr.

2.b. | Incrementum $O.5a4$, est $O.20a3 + O.30a2 + O.20a + O.5 + 5$.
8.p. | Incrementum $m5$, est $5m4 + 10m3 + 10m2 + 5m + u$.
8.p. | Incrementum $q5$, est $5q4 + 10q3 + 10q2 + 5q + u$.
sup. | $O.20a3$, maior est, quàm $5m4$.
sup. | $O.30a2$ maior est, quàm $10m3$.
sup. | $O.20a$, maior est, quàm $10m2$.

ſup.	*O.*5+5, maior eſt, quàm 5*m*+*u*.
	Incrementum *O.* 5*a*4, maius eſt incremento *m*5. Quod &c.
ſup.	*O.*20*a*3; minor eſt, quàm 5*q*4.
ſup.	*O.*30*a*2, minor eſt, quàm 10*q*3.
ſup.	*O.*20*a*, minor eſt, quàm 10*q*2.
ſup.	*O.*5+5 minor eſt, quàm 5*q*+*u*.
	Incrementum *O.*5*a*4, minus eſt incremento *q*5. Quod &c.
26.*h.*	*O.*5*a*4, pro binario, maior eſt, quàm *m*5; minor, quàm *q*5.
	O. 5*a*4, pro ternario, & reliquis numeris, maior eſt, quàm *m*5; minor, quàm *q*5. Quod &c.

Dico *O.*20*a*3*r*, incrementum, maius eſſe incremento *m*5; minus incremento *q*5: & *O.*20*a*3*r*, maiorem eſſe, quàm *m*5; minorem, quàm *q*5.

Demonſtr.

2. *h.*	*O.* 20*a*3*r* incrementum, eſt *O.*60*a*2*r* + *O.*60*ar* + *O.*20*r* + 20*t*.
8. *p.*	Incrementum *m*5, eſt 5*m*4 + 10*m*3 + 10*m*2 + 5*m* + *u*.
8. *p.*	Incrementum *q*5, eſt 5*q*4 + 10*q*3 + 10*q*2 + 5*q* + *u*.
ſup.	*O.*60*a*2*r*, maior eſt, quàm 5*m*4.
ſup.	*O.*60*ar*, maior eſt, quàm 10*m*3.
ſup.	*O.*20*r*, maior eſt, quàm 10*m*2.
	20*t*, maior eſt, quàm 5*m*+*u*.
	Incrementum *O.*20*a*3*r*, maius eſt incremento *m*5. Quod &c.

*O.*60

sup. | $O.6oa2r$, minor eſt, quàm $5q4$.
sup. | $O.6oar$, minor eſt, quàm $10q3$.
29. *b.* | $O.2or+2ot$, minor eſt, quàm $10q2+5q+u$.
| Incrementum $O.2oa3r$, minus eſt incremento $q5$. Quod &c.
26. *b.* | $O.2oa3r$, pro binario, maior eſt, quàm $m5$; minor, quàm $q5$.
| $O.2oa3r$, pro ternario, & reliquis numeris, maior eſt, quàm $m5$; minor, quàm $q5$. Quod &c.

Dico $O\,3oa2r2$ incrementum, maius eſſe incremento $m5$; minus incremento $q5$: & $O.3oa2r2$, maiorem eſſe, quàm $m5$; minorem, quàm $q5$.

Demonſtr.

2. *b.* | Incrementum $O.3oa2r2$, eſt $O.6oar2+O.3or2+3ot2$.
8. *p.* | Incrementum $m5$, eſt $5m4+10m3+10m2+5m+u$.
8. *p.* | Incrementum $q5$, eſt $5q4+10q3+10q2+5q+u$.
ſup. | $O.6oar2$, maior eſt, quàm $5m4$.
ſup. | $O.3or2$, maior eſt, quàm $10m3$.
| $O.3ot2$, maior eſt, quàm $10m2+5m+u$.
| Incrementum $O.3oa2r2$, maius eſt incremento $m5$. Quod &c.
ſup. | $O.6oar2$, minor eſt, quàm $5q4$.
29. *b.* | $O.3or2+3ot2$, minor eſt, quàm $10q3$.
| Incrementum $O.3oa2r2$, minus eſt incremento $q5$. Quod &c.

26. h. O.3042r2, pro binario, maior eſt, quàm $m5$; minor, quàm $q5$.

O.3042r2, pro ternario, alioue quolibet numero, maior eſt, quàm $m5$; minor, quàm $q5$. Quod &c.

Similiter oſtendetur de omnibus quadratricibus in infinitum, hac ſemper methodo ſeruata.

Quare &c.

Theor. 31. Prop. 31.

QVælibet quadratrix eſt æqualis ſemitotæ vnitate plus ordinatæ, additis, demptiſque ſemitotis, aliqualiter acceptis, non plus ordinatis, quàm ſit eius baſis.

Demonſtr.

Patet inductione per 6.h.

22. h. Deinde ſic. Quælibet quadratrix, eſt æqualis totæ, vnitate plus ordinatæ, demptis, additiſq; aliqualiter acceptis totis, non plus ordinatis, quàm

6. h. ſit eius baſis. Tota verò vnitate plus ordinata, eſt æqualis ſemitotæ pariter ordinatæ, vnà cum ſemitotis non plus ordinatis, aliqualiter acceptis, & vnitate: & reliquæ totæ non plus ordinatæ, ſunt æquales ſemitotis, non plus ordinatis, aliqualiter acceptis, & vnitati.

Quare quælibet quadratrix eſt æqualis ſemitotæ vnitate plus ordinatæ additis &c.

Theor.

Theor. 32. *Prop.* 32.

QVælibet quadratrix est æqualis ſeſquitotæ, vnitate plus ordinatæ, demptis, additiſque ſeſquitotis, aliqualiter acceptis, non plus ordinatis, quàm ſit eius baſis.

Demonſtr.

Patet inductione per 7.*h*.

22. *h*. Deinde ſic. Quælibet quadratrix, eſt æqualis totæ, vnitate plus ordinatæ, demptis, additiſque aliqualiter acceptis totis, non plus ordinatis, quã

7. *h*. ſit eius baſis. Tota verò, vnitate plus ordinata, æqualis eſt ſeſquitotæ, pariter ordinatæ, demptis, additiſque alijs, acceptis aliqualiter ſeſquitotis non plus ordinatis: & reliquæ totæ non plus ordinatæ, ſunt ſeſquitotis additis, & ſubtractis, non plus ordinatis æquales. Ergo quælibet quadratrix, eſt æqualis ſeſquitotæ vnitate plus ordinatę, demptis, additiſque alijs, acceptis aliqualiter ſeſquitotis, non plus ordinatis, quam ſit eius baſis.

Theor. 33. *Prop.* 33.

QVælibet quadratrix media, eſt æqualis quadratrici, in eadem baſi, primæ, vna cum alijs primi lateris ſpeciebus, aliqualiter acceptis. Et ſubquadratrix, ſubquadratrici.

Demonſtr.

Patet inductione per 8.*h*.

12. *h.* Deinde sic. Quælibet quadratrix, est æqualis totæ, vnitate plus ordinatæ, quàm sit eius basis, demptis, additiue alijs totis, aliqualiter acceptis,
14. *h.* non plus ordinatis, quàm sit eius basis. Tota autẽ vnitate plus ordinata, est æqualis quadratrici primæ, in æqueordinata basi iacenti, vna cum alijs speciebus, in primo latere, in inferioribus basibus, aliqualiter acceptis. Et reliquæ inferiores totæ, similiter inferioribus quadratricibus, & speciebus sunt æquales, aliqualiter acceptis. Quare quælibet quadratrix media, est æqualis primæ, in eadem basi, iacenti quadratrici, vnà cum alijs primi late-
2. *p.* ris speciebus, aliqualiter acceptis. Et subquadratrix, subquadratrici.

Theor. 34. *Prop.* 34.

QVælibet quadratrix, est æqualis quadratrici, in eadem basi, vicinæ, additis vtrimque totis, non plus ordinatis, quàm sit ipsa basis. Et subquadratrix, subquadratrici. *Demonstr.*

Patet inductione per 9. *h.*

21. *h.* Deinde sic. Quælibet quadratrix, est æqualis quadratrici, in eadem basi, sibi vicinæ, additis vtrimque alijs inferiorum basiũ speciebus, aliqualiter acceptis, & totis non plus ordinatis, quàm sit
22. *h.* ipsa basis. Sunt autem aliæ inferiorum basium species, æquales totis, non plus ordinatis, quàm sit

ipsa

ipsa basis, aliqualiter acceptis. Ergo quælibet quadratrix, est æqualis quadratrici, in eadem basi, sibi vicinę additis vtrimq; totis, nō plus ordinatis quā
2. p. sit ipsa basis. Et subquadratrix subquadratrici.

Theorema 35. Prop. 35.

QVælibet quadratrix, est æqualis quadratrici, in eadem basi, sibi vicinæ, additis vtrimque semitotis, non plus ordinatis, quàm sit ipsa basis. Et subquadratrix, subquadratrici.

Demonstr.

Patet inductione per 10. *h.*

34.b. Deinde sic. Quælibet quadratrix est æqualis quadratrici, in eadē basi, sibi vicinę, additis vtrimq; totis non plus ordinatis, quàm sit ipsa basis. Totæ
6. b. autem non plus ordinatæ, semitotis non plus ordinatis, acceptis aliqualiter, sunt æquales. Ergo quælibet quadratrix est æqualis quadratrici in eadem basi sibi vicinæ, additis vtrimque semitotis,
2. p. non plus ordinatis, quàm sit ipsa basis. Et subquadratrix, subquadratrici.

Theor. 36. Prop. 36.

QVælibet quadratrix, est æqualis quadratrici, in eadem basi, sibi vicinæ, additis vtrimque sesquitotis, non plus ordinatis, quàm sit ipsa basis. Et subquadratrix, subquadratrici.

De-

Demonstr.

Patet inductione per 11. *h.*

34. *h.* Deinde sic. Quælibet quadratrix est æqualis quadratrici, in eadem basi, sibi vicinæ, additis vtrimque totis, non plus ordinatis, quàm sit ipsa
7. *h.* basis. Totæ autem, non plus ordinatæ, sesquitotis, non plus ordinatis, acceptis aliqualiter, sunt æquales. Ergo quælibet quadratrix, est æqualis quadratrici, in eadē basi, sibi vicinæ, additis vtrimque totis, non plus ordinatis, quàm sit ipsa basis.
2. *p.* Et subquadratrix, subquadratrici.

Theor. 37. Prop. 37.

QVælibet quadratrix, est æqualis quadratrici, sibi, in eadem basi, vicinæ, additis vtrimque primi lateris speciebus, inferiorum basium. Et subquadratrix, subquadratrici. *Demonstr.*

Patet inductione per 12. *h.*

34. *h.* Deinde sic. Quælibet quadratrix, est æqualis quadratrici, sibi, in eadē basi vicinę, additis vtrimq; totis, nō plus ordinatis, quàm sit ipsa basis, aliquà-
14. *h.* liter acceptis. quæ totę, sunt æquales speciebus inferiorū basium, primi lateris, aliqualiter acceptis. Ergo quælibet quadratrix, est æqualis quadratrici sibi in eadem basi vicinæ, additis vtrimq; primi la-
2. *p.* teris speciebus, inferiorum basium. Et subquadratrix, subquadratrici.

Pe-

Petrus Mengolus, Illustrissimo D. Fabio Alamandino, Nobili Bononiensi, Domino suo maximè recolendo, beatè viuere.



E quasi proportionibus, inauditum hucusque Geometricum elementum, ad theoremata, cæteroqui difficillima, facili negotio soluenda, cum instituerim: ex ijs, qui meam scholam frequentarunt, præter te, Iuuenis Illustrissime, neminem habeo satis dispositum; qui rem subtilissimam valeat intelligere. Cumque verear, si forte possit intelligi, quod legendum omnibus propono; nisi priùs ipse oretenus, alicui eius doctrinæ satis capaci, meam sententiam explicuerim: apud te precator accessi; vt dignareris (licet vacationum tempore admodum necessaria) ruralibus partim delicijs, partim negotijs quidquam detrahere; priuatisque meis lucubrationibus auditor interuenire. Pro tua benignitate statim, quod postulabam, imple-

ple-

pleuisti: & concessum tibi diuinitus intellectum, subtilissimum, inuentis meis, ea intentione adhibuisti; vt & me ipsum inuentorem, & prælectorem, in plurimis etiam præuenires. Plurimas itaque tibi primùm gratias profiteor: quod tàm humiliter, & liberaliter, me de studijs meis priuatis tecum patiaris communicare. Deinde illas easdem lucubrationes, vnà cum alijs præcedentium elementorum, pleniùs tractatas, prælegendas offero, scriptis præsentibus; antequam totum opus publici iuris esse incipiat: non quasi gratiam redditurus; sed in mei erga te obsequij monimentum.

Vale.



GEO-

GEOMETRIÆ SPECIOSÆ

ELEMENTVM TERTIVM.

DEFINITIONES.

1. Ratio indeterminata determinabilis, quæ indeterminari, poteſt eſſe maior, quam data quælibet, quatenus ita determinabilis, dicetur Quaſi infinita.

2. Et quæ poteſt eſſe minor, quàm data quælibet, quatenus ita determinabilis, dicetur, Quaſi nulla.

3. Et quæ poteſt eſſe minor, quàm data quælibet maior inæqualitas; & maior, quàm data quælibet minor inæqualitas, quatenus ita determinabilis, dicetur, Quaſi æqualitas. Vel aliter. quæ poteſt eſſe propior æqualitati, quàm data quælibet non æqualitas, quatenus talis, dicetur, Quaſi æqualitas.

4. Et quæ poteſt eſſe minor, quàm data quælibet maior, propoſitâ quadam ratione; & maior, quàm data quælibet minor, propoſitâ eâdem ratione, quatenus ita deter-

minabilis, dicetur, Quasi eadem ratio. Vel aliter. quæ potest esse propior cuidam propositæ rationi, quàm data quælibet alia non eadem, quatenus talis, dicetur, Quasi eadem.

5. Et rationum quasi earundem inter se, termini dicentur, Quasi proportionales.

6. Et quasi æqualitatum, dicentur, Quasi æquales.



Theor.

Theor. 1. Prop. 1.

INæqualium rationum maior, permutando, eſt maior: item componendo, & diuidendo, eſt maior.

Demonſtr.

def.8.5. Maioris enim rationis antecedens, maior eſt, quàm proportionalis, cum reliquis terminis: & dempta quantitate, vt proportionalis relinquatur;
2. p. permutando, & componendo, & diuidendo, pro-
8.5. portionalis erit, & antecedens: eâdemq reſtituta quantitate, erit antecedens maior, quàm proportionalis, permutatæ, aut compoſitæ, aut diuiſæ proportionalitatis. Quod &c.

Quare &c.

Theorema 2. Prop. 2.

INæqualium rationum maior, conuertendo, eſt minor.

Demonſtr.

def.8.5. Nam maioris rationis conſequens eſt minor, quàm proportionalis, cum reliquis terminis: factuſque conuertendo antecedens, adhuc eſt minor, quàm proportionalis, cum reliquis terminis. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 3. Prop. 3.

INæqualium rationum maior, per conuerſionem rationis, eſt minor. N 2 *Hy-*

Hypoth.

a; b: maior, quàm c; d.
a: maior, quàm b.
c: maior, quàm d.
Dico a; a—b: minorem esse, quàm c; c—d.

Demonst.

hyp.	a; b: maior, quàm c; d.
p. h.	a—b; b: maior, quàm c—d; d.
2. h.	b; a—b: minor, quàm d; c—d.
p. h.	a; a—b: minor, quàm c; c—d. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 4. Prop. 4.

EX maioribus rationibus, ex æquali, maior est ratio composita: & ex minoribus, minor.

Hypoth.

a; b: maior, quàm c; d.
e; f: maior, quàm g; h.
Dico a; b,+e: f: maiorem esse, quàm c; d,+g; h.

Præpar.

a; b: i; d.
e; f: d; l.
g; h: d; m.

Demonstr.

constr.	a; b: i; d.
hypoth.	a; b: maior, quàm c; d.
13. 5.	i; d: maior, quàm c; d.

i: ma-

10. 5.	i: maior, quàm c.
constr.	$e; f: d; l$.
hypoth.	$e; f$: maior, quàm $g; h$.
23. 5.	$d; l$: maior, quàm $g; h$.
constr.	$g; h: d; m$.
13. 5.	$d; l$: maior, quàm $d; m$.
10. 5.	l: minor, quàm m.
8. 5.	$i: l$: maior, quàm $c; m$.
p. p.	$a; b,+e; f: i; d,+d; l: i; l$.
p. p.	$c; d,+g; h: c; d,+d; m: c; m$.
	$a; b,+e; f$: maior, quàm $c; d,+g; h$. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 5. Prop. 5.

MAioris inæqualitatis plus multiplicata ratio, maior est, quàm minùs: & minoris, minor.

Hypoth.

	a: maior, quàm b.
3. p.	$a3; b3$: triplicata $a; b$.
3. p.	$a2; b2$: duplicata $a; b$.

Dico $a3; b3$: maiorem, quàm $a2; b2$.
Et $b3; a3$: minorem, quàm $b2. a2$.

Demonstr.

def. 6. p.	$a3; a2: a; u$.
def. 6. p.	$b3; b2: b; u$.
8. 5.	$a; u$: maior, quàm $b; u$.
13. 5.	$a3; a2$: maior, quàm $b3; b2$.

$a3$;

p. b. | $a3$; $b3$: maior, quàm $a2$; $b2$. Quod &c.
2. b. | $b3$; $a3$: minor, quàm $b2$; $a2$. Quod &c.
Quare &c.

Theor. 6. Prop. 6.

SI prima ad ſecundam, maiorem habuerit rationem, quàm tertia ad quartam: etiam æqueproportionales cum prima, & tertia, ad æqueproportionales cum ſecunda, & quarta, maiorem habebunt rationem, ſi prout ſibi reſpondent, ita ſumantur.

Hypoth.

a; b: maior, quàm c; d.
a; c: e; f.
b; d: g; h.
Dico e; g: maiorem eſſe, quàm f; h.

Demonſtr.

hypoth. | a; b: maior, quàm c; d.
p. b. | a; c: maior, quàm b; d.
13. 5. | e; f: maior, quàm g; h.
p. b. | e; g: maior, quàm f; h. Quod &c.
Quare &c.

Theor. 7. Prop. 7.

RAtio quaſi infinita, conuertendo, eſt quaſi nulla.

Hypoth.

Eſto ratio A ad B, quaſi infinita.
Dico conuertendo, B ad A, eſſe quaſi nullam.

Pra-

Præpar.

Assumatur quælibet ratio *c* ad *d*.

Demonstr.

def.1.h. | Ratio *A* ad *B*, maior potest esse, quàm *d* ad *c*:
2. h. | Ergo conuertendo, *B* ad *A*, minor potest esse, quàm *c* ad *d*. Ergo *B* ad *A*, est ratio quasi nulla.
def.2.h. | Quod &c.

Quare &c.

Theor. 8. *Propos.* 8.

RAtio quasi infinita, componendo, est quasi infinita: item diuidendo, est quasi infinita.

Hypoth.

Esto ratio *A* ad *B*, quasi infinita.

Dico componendo *A+B* ad *B*, esse quasi infinitam.

Præpar.

Assumatur quælibet ratio *c* ad *d*: quod si *c*, est maior, quàm *d*; sit excessus *e*.

Demonstr.

| Siquidem *c* est æqualis, vel minor, quàm *d*: pa-
8. 5. | tet, quod *A+B* ad *B*, maior potest esse, quàm
def. 1. | *c* ad *d*. Quòd si *c* est maior, quàm *d*: quoniam
p. h. | *A* ad B, maior potest esse, quàm *e* ad *d*: ergo
| componendo, *A+B* ad *B*, maior potest esse, quàm
præpar. | *e+d* ad *d*: sed *e+d* est *c*: ergo *A+B* ad *B*, ma-
def. 1. | ior potest esse, quàm *c* ad *d*. Ergo *A+B* ad *B*,
| ratio est quasi infinita. Quod &c.

Dico

Dico diuidendo $A-B$ ad B, rationem esse quasi infinitam.

Demonstr.

def. 1. | Ratio A ad B, potest esse maior, quàm $c+d$ ad d:
p. b. | Ergo diuidendo $A-B$ ad B, potest esse maior,
def. 1. | quàm c ad d. Ergo $A-B$ ad B, ratio est quasi infinita. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 9. Pro. 9.

Ratio quasi infinita, per conuersionem rationis, est quasi æqualitas.

Hypoth.

Esto ratio A ad B, quasi infinita.

Dico, per conuersionem rationis, A ad $A-B$, esse quasi æqualitatem.

Præpar.

Assumatur quælibet ratio non æqualitas, cuius maior terminus c, minor d.

Demonstr.

def. 1. b. | Ratio A ad B, potest maior esse, quàm c ad
3. b. | $c-d$: ergo, per conuersionem rationis, A ad $A-B$, potest minor esse, quàm c ad d: & est maior æqualitate: ergo A ad $A-B$, est propior
def. 3. b. | æqualitati, quàm sit proposita ratio c ad d: ergo ratio A ad $A-B$, est quasi æqualitas. Quod &c.

Quare &c.

Theor.

Theor. 10. Prop. 10.

RAtio quasi nulla, conuertendo, est quasi infinita.

Hypoth.

Esto ratio *A* ad *B*, quasi nulla.

Dico conuertendo, rationem *B* ad *A*, esse quasi infinitam.

Præpar.

Assumatur quælibet ratio *c* ad *d*.

Demonstr.

def.2.h. Ratio *A* ad *B*, minor potest esse, quàm *d* ad
2. h. *c*: ergo conuertendo, ratio *B* ad *A*, maior potest
def.1.h. esse, quàm *c* ad *d*: ergo ratio *B* ad *A*, est quasi infinita. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 11. Prop. 11.

RAtio quasi nulla, componendo, est quasi æqualitas.

Hypoth.

Esto ratio *A* ad *B*, quasi nulla.

Dico componendo, rationem *A+B* ad *B*, esse quasi æqualitatem.

Præpar.

Assumatur quælibet ratio *c* ad *d*, non æqualitas; cuius maior terminus *c*, minor *d*.

Demonstr.

def.2.h. Ratio *A* ad *B*, potest minor esse, quam *c — d*
2. h. ad *d*: ergo conuertendo, *B* ad *A*, potest maior
p. h. esse, quam *d* ad *c — d*: ergo componendo *A+B*

 ad

3. b. ad A, poteſt maior eſſe, quàm c ad $c - d$: ergo per conuerſionem rationis $A+B$ ad B poteſt minor eſſe, quàm c ad d: & eſt maior æqualitate: er-
def. 3. b. go $A+B$ ad B, eſt propior æqualitati, quàm c ad d: ergo $A+B$ ad B, eſt quaſi æqualitas. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 12. *Prop.* 12.

EX rationibus quaſi infinitis, ex æquali, quaſi infinitæ ſunt rationes compoſitæ.

Hypoth.

A ad B, & C ad D, ſunto rationes quaſi infinitæ.

Dico ex æquali, ex A ad B, & C ad D compoſitam, eſſe quaſi infinitam.

Præpar.

Aſſumatur e ad f, ratio quælibet.

Demonſtr.

Quoniam A ad B, & C ad D, ſunt rationes
def. 1. b. quaſi infinitæ: poſunt eſse A ad B, maior, quàm
4. b. e ad f; & C ad D, maior æqualitate. Quare & vtriſque A ad B, & C ad D, compoſita ratio, poteſt eſſe maior, quàm ex e ad f, & ex
7. 5. æqualitate, compoſita; ideſt, quàm ipſa e ad f
def. 1. b. ratio. Quare ex vtriſque A ad B, & C ad D, compoſita ratio eſt quaſi infinita. Quod &c.

Quare &c.

Theor.

Theor. 13. Prop. 13.

EX rationibus quasi nullis, ex æquali, quasi nullæ sunt rationes compositæ.

Hypoth.

A ad *B*, & *C* ad *D*, sunto rationes quasi nullæ.

Dico ex æquali, ex *A* ad *B*, & *C* ad *D* rationem compositam, esse quasi nullam.

Præpar.

Assumatur quælibet ratio *e* ad *f*.

Demonstr.

Quoniam *A* ad *B*, & *C* ad *D* sunt rationes
def.2.b. quasi nullæ, possunt esse, *A* ad *B*, minor, quàm *e* ad *f*: & *C* ad *D*, minor æqualitate. Quare
4. b. ex vtrisque *A* ad *B*, & *C* ad *D*, composita ratio, potest esse minor, quàm ex vtrisque *e* ad *f*,
7. 5. & ex æqualitate composita; ideſt, quàm ipsa *e* ad *f*. Quare ex vtrisque *A* ad *B*, & *C* ad *D*, com-
def.2.b. posita ratio est quasi nulla. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 14. Prop. 14.

RAtio quasi æqualitas, conuertendo, est quasi æqualitas.

Hypoth.

Esto ratio *A* ad *B*, quasi æqualitas.

Dico conuertendo, *B* ad *A*, quasi æqualitatem esse.

Præpar.

Assumantur duæ quælibet rationes, *c* ad *d*, maior æqualitate: & *e* ad *f*, minor.

Demonstr.

Quoniam ratio *c* ad *d*, est maior æqualitate; ergo conuertendo, *d* ad *c*, est minor æqualitate: & quoniam *e* ad *f*, est minor æqualitate; ergo conuertendo *f* ad *e*, est maior æqualitate. Et quoniam *A* ad *B*, est quasi æqualitas: ergo potest *A* ad *B*, maior esse, quàm *d* ad *c*, & minor, quàm *f* ad *e*: ergo conuertendo potest *B* ad *A*, minor esse, quàm *c* ad *d*, & maior, quàm *e* ad *f*. Ergo *B* ad *A*, est quasi æqualitas. Quod &c.

2. h. — *2. h.* — *hypoth.* — *def. 3. h.* — *2. h.* — *def. 3. h.*

Quare &c.

Theor. 15. Prop. 15.

Ratio quasi æqualitas, componendo, est quasi dupla.

Hypoth.

Esto ratio *A* ad *B*, quasi æqualitas.

Dico componendo *A + B* ad *B*, esse quasi duplam.

Præpar.

Assumatur duæ quælibet rationes *c* ad *d*, maior, quàm dupla: & *e* ad *f*, maior quidem æqualitate, sed minor, quàm dupla.

Demonstr.

constr. — *p. h.*

Quoniam *c* ad *d*, est maior, quàm dupla, diuidendo, *c — d* ad *d*, est maior æqualitate: & quo-

constr. quoniam *e* ad *f*, est maior æqualitate, sed mi-
p.h. nor, quàm dupla; diuidẽdo, *e*—*f* ad *f*, est minor
def 3.h. æqualitate. Et quoniam *A* ad *B*, est quasi æqua-
litas; potest *A* ad *B*, minor esse, quàm *c*—*d* ad
p.h. *d*; & maior, quàm *e*—*f* ad *f*. Ergo compo-
nendo, potest *A*+*B* ad *B*, minor esse, quàm *c* ad
def.4.h. *d*; & maior, quàm *e* ad *f*. Ergo *A*+*B* ad *B*,
est quasi dupla. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 16. Prop. 16.

Ratio quasi æqualitas, diuidendo, est quasi nulla.

Hypoth.

Esto ratio *A* ad *B* quasi æqualitas: & esto *A* maior, quàm *B*.

Dico diuidendo *A*—*B* ad *B*, esse quasi nullam.

Præpar.

Assumatur quælibet ratio *c* ad *d*.

Demonstr.

hyp. Quoniam *A* ad *B*, est quasi æqualitas; & est *A*
maior, quàm *B*; & *c*+*d* maior, quàm *d*: ergo
def.3.h. potest *A* ad *B* ratio, minor esse, quàm *c*+*d* ad
p.h. *d*: ergo diuidendo potest *A*—*B* ad *B* ratio, mi-
def.3.h. nor esse, quàm *c* ad *d*: ergo *A*—*B* ad *B*, ratio
est quasi nulla. Quod &c.

Quare &c.

Theor.

Theor. 17. *Prop.* 17.

RAtio quasi æqualitas, per conuersionem rationis est quasi infinita.

Hypoth.

Esto ratio quasi æqualitas *A* ad *B*: & esto *A* maior, quàm *B*.

Dico, per conuersionem rationis, *A* ad *A*—*B*, rationem esse quasi infinitam.

Præpar.

Assumatur quælibet ratio maioris inæqualitatis *c* ad *d*.

Demonstr.

hyp. Quoniam *A* ad *B*, est quasi æqualitas; & est *A*
def.3.h. maior, quàm *B*; item *c* maior, quàm *c*—*d*: ergo
3.h. ratio *A* ad *B*, potest minor esse, quàm *c* ad *c*—*d*: ergo per conuersionem rationis, *A* ad *A*—*B* ratio, potest maior esse, quàm *c* ad *d*: & est maior omnibus, tùm æqualitatis, tùm minoris
def.p.h. inæqualitatis rationibus: ergo *A* ad *A*—*B* ratio est quasi infinita. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 18. *Prop.* 18.

QVæ eidem sunt quasi æqualia, inter se sunt quasi æqualia.

Hypoth.

Sunt *A*, *B*, quasi æqualia: item *B*, *C*, quasi æqualia.
Dico *A*, *C*, quasi æqualia esse.

Præ-

Præpar.

Assumatur quælibet ratio *d* ad *e*, non æqualitas: cuius maior terminus *d*, minor *e*. & inter *d*, *e*, media sumatur *f*.

Demonstr.

def.3.b. Quoniam *A*, *B*, sunt quasi æqualia, potest *A* ad *B*, minus esse, quàm *d* ad *f*: & maius, quàm *f* ad *d*. Item *B* ad *C* potest minus esse, quàm *f* ad *e*, & maius, quàm *e* ad *f*. Ergo ex æquali, *4.b.* potest *A* ad *C* minus esse, quàm *d* ad *e*; & maius, quàm *e* ad *d*, ergo *A* ad *C*, quasi est *def.3.b.* æqualis. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 19. Propos. 19.

QVæ eidem sunt quasi eędem rationes, inter se sunt quasi eędem.

Hypoth.

A ad *B*, quasi eadem est, quæ *C* ad *D*: & *C* ad *D*, quasi eadem, quæ *E* ad *F*.

Dico *A* ad *B*, quasi eamdem esse quæ *E* ad *F*.

Præpar.

Assumatur quælibet ratio *g* ad *h*, maior, quàm cui propior potest esse *E* ad *F*: & quælibet *i* ad *l*, minor.

Demonstr.

def.4.b. Quoniam *C* ad *D*, quasi eadem est, quæ *E* ad *F*: potest *C* ad *D*, minor esse, quàm *g* ad *h*; & *2.b.* maior, quàm *i* ad *l*. Ergo *g* ad *h*, maior est, quàm

quàm cui propior poteſt eſſe *C* ad *D*; & *i* ad *l*,
def.4.h. minor. Et quoniam *A* ad *B*, quaſi eſt eadem, quæ *C*. ad *D*: ergo *A* ad *B*, poteſt eſſe minor,
conſtr. quàm *g* ad *h*; & maior, quàm *i* ad *l*. Sed *g* ad *h* eſt quælibet aſſumpta, maior, quàm cui propior poteſt eſſe *E* ad *F*; & *i* ad *l*, eſt quælibet
def.4.h. aſſumpta, minor; ergo *A* ad *B*, eſt quaſi eadem, quæ *E* ad *F*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 20. Prop. 20.

QVaſi proportionales, conuertendo, ſunt quaſi proportionales.

Hypoth.

Sint quaſi proportionales *A* ad *B*, vt *C* ad *D*.

Dico conuertendo, quaſi proportionales eſſe *B* ad *A*, vt *D* ad *C*.

Præpar.

Sumatur quælibet *e* ad *f*, maior, quàm cui propior poteſt eſſe *D* ad *C*: & quælibet *g* ad *h*,
2. h. minor: & erit conuertendo, ſumpta *f* ad *e*, minor, quàm cui propior poteſt eſſe *C* ad *D*; & *h* ad *g*, maior.

Demonſtr.

hypoth. Quoniam *A* ad *B*, quaſi eſt eadem, quæ *C*
def.4.h. ad *D*: ergo *A* ad *B*, poteſt eſſe minor, quàm *h*
2. h. ad *g*; & maior, quàm *f* ad *e*: ergo conuertendo,

do, *B* ad *A*, poteſt eſſe maior, quàm *g* ad *h*; & minor, quàm *e* ad *f*: ergo *B* ad *A*, quaſi eadem eſt, quæ *D* ad *C*. Quod &c.

def.4.h.

Quare &c.

Theor. 21. Prop. 21.

EX quaſi ijſdem rationibus, ex æquali, quaſi eędem ſunt rationes compoſitæ.

Hypoth.

A	*B*		*C*	*D*
E	*F*		*G*	*H*
i	*n*	*r*	*p*	*k*
l	*o*	*s*	*q*	*m*

A ad *B*, quaſi eadem ratio eſt, quæ *C* ad *D*: & *E* ad *F*, quaſi eadem, quæ *G* ad *H*.

Dico ex æquali, ex *A* ad *B*, & *E* ad *F* compoſitam, quaſi eamdem eſſe, quæ ex *C* ad *D*, & *G* ad *H* compoſita.

Præpar.

Aſſumatur *i* ad *k*, quælibet ratio maior, quàm cui propior poteſt eſſe, ex *C* ad *D*, & *G* ad *H* compoſita: item aſſumatur quælibet *l* ad *m*, minor. Deinde fiant *i* ad *n*, & *l* ad *o*, ſicut cui propior poteſt eſſe *C* ad *D*: item *p* ad *k*, & *q* ad *m*, ſicut cui propior poteſt eſſe *G* ad *H*. Denique ſumatur inter *n*, *p*, media quælibet quantitas *r*: & inter *o*, *q*, media quælibet *s*.

Demonstr.

constr. Quoniam *i* ad *k*, maior est, quàm cui propior potest esse, ex *C* ad *D*, & *G* ad *H* composita; & est *i* ad *n*, cui propior potest esse *C* ad *D*, &
4. *h.* *p* ad *k*, cui propior potest esse *G* ad *H*: ergo *i* ad *k*, maior est, quàm, quæ ex *i* ad *n*, & ex *p* ad k, composita. Ergo *n*, maior est, quàm *p*. Si
p. h. enim *n*, esset æqualis ipsi *p*: ex *i* ad *n*, & ex æqualitate, & ex *p* ad *k*, cōposita ratio *i* ad *k*, esset eadem, quæ ex ea, cui propior potest esse *C* ad *D*, ex æqualitate, & ex ea, cui propior potest esse *G*
4. *h.* ad *H*, composita est; contra assumptum. Quod si *n*, essent minor, quàm *p*: ex *i* ad *n*, & minori inæqualitate, & *p* ad *k*, composita ratio *i* ad k, esset minor, quàm quæ ex ea, cui propior potest esse *C* ad *D*, ex æqualitate, & ex ea, cui propior potest esse *G* ad *H*, composita est; contra idem assumptum.

constr. Ergo *n*, maior est, quàm *p*: & *r*, minor, quàm
8. 5. *n*; & maior quàm *p*: habetque *i* ad *r*, maiorem rationem, quàm *i* ad *n*; idest maiorem, quàm,
8. 5. cui propior potest esse *C* ad *D*: habet quoque *r* ad k, maiorem, quàm *p* ad k; idest, maiorem, quàm, cui propior potest esse *G* ad *H*.

constr. Similiter, quoniam *l* ad *m*, minor est, quàm cui propior potest esse ex *C* ad *D*, & *G* ad *H* composita: & est *l* ad *o*, eadem, cui propior po-
4. *h.* test esse *C* ad *D*: & *q* ad *m*, eadem, cui propior

A	*B*		*C*	*D*
E	*F*		*G*	*H*
i	*n*	*r*	*p*	*k*
l	*o*	*s*	*q*	*m*

4. *h.* pior poteſt eſſe *G* ad *H*: ergo *l* ad *m*, minor eſt, quàm quæ eſt ex *l* ad *o*, & *q* ad *m* compoſita. Ergo *o*, minor eſt, quàm *q*. demonſtrari enim poteſt vt ſupra, quod ſi *o*, eſſet æqualis, vel
p. h. maior, quàm *q*: eſſet *l* ad *m* ratio non minor,
4. *h.* quàm cui propior poteſt eſſe, ex *C* ad *D*, & *G* ad *H* compoſita; contra aſſumptum.

conſtr. Cum itaque *o*, ſit minor, quàm *q*: erit *s*, ma-
8. 5. ior, quàm *o*; minor, quàm *q*: habetque *l* ad *s*, minorem rationem, quàm *l* ad *o*; ideſt, minorem,
8. 5. quàm, cui propior poteſt eſſe *C* ad *D*. habet quoque *s* ad *m*, minorem rationem, quàm *q* ad *m*: ideſt, minorem, quàm, cui propior poteſt eſſe *G* ad *H*.

ſup. Itaque *i* ad *r*, maior eſt, quàm, cui propior
hyp. poteſt eſſe *C* ad *D*: & *l* ad *s*, minor. Sed *A* ad
def.4.h. *B*, quaſi eadem eſt, quæ *C* ad *D*: ergo *A* ad *B*, poteſt eſſe minor, quàm *i* ad *r*, & maior, quàm
ſup. *l* ad *s*. Similiter *r* ad k maior eſt, quàm, cui pro-
hypoth. pior poteſt eſſe *G* ad *H*; & *s* ad *m*, minor: & eſt
def.4.h. *E* ad *F*, quaſi eadem, quæ *G* ad *H*: ergo *E* ad *F* poteſt eſſe minor, quàm *r* ad k; & maior,
4. *h.* quàm *s* ad *m*. Ergo ex æquali, poteſt ex *A* ad *B*,

A	*B*		*C*	*D*	
E	*F*		*G*	*H*	
i	*n*	*r*	*p*	*k*	
l	*o*	*s*	*q*	*m*	

& *E* ad *F* composita, minor esse, quàm, quæ ex *i* ad *r*, & *r* ad k, componitur, *i* ad k; & maior, quàm, quæ ex *l* ad *s*, & *s* ad *m*, compo-
constr. nitur, *l* ad *m*. Est autem *i* ad k, sumpta quælibet maior, quàm cui propior potest esse composita ex *C* ad *D*, & *G* ad *H*; & *l* ad *m*, minor.
def.4.b. Ergo composita ex *A* ad *B*, & *E* ad *F*, quasi eadem est, quæ composita ex *C* ad *D*, & *G* ad *H*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 22. Prop. 22.

QVasi proportionales, permutando, sunt quasi proportionales. *Hypoth.*

Sint quasi proportionales *A* ad *B*, vt *C* ad *D*.

Dico permutando, quasi proportionales esse *A* ad *C*, vt *B* ad *D*. *Demonstr.*

hypoth. Sunt enim quasi eędem rationes *A* ad *B*, & *B*
21. b. ad *C*; quæ *B* ad *C*, & *C* ad *D*: ergo ex æquali, *A* ad *C*, & *B* ad *D*, rationes compositę sunt qua-
def.5.b. si eædem: Ergo *A* ad *C*, & *B* ad *D*, sunt quasi proportionales. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 23. Prop. 23.

RAtiones quasi eædem, componendo, sunt quasi eædem.

Hypoth.

A ad *B*, quasi eadem esto, quæ *C* ad *D*.

Dico componendo *A+B* ad *B*, quasi eandem esse, quæ *C+D* ad *D*.

Præpar.

Assumatur *e* ad *f*, quælibet ratio maior, quàm cui propior potest esse *C+D* ad *D*: itẽ *g* ad *h*, quælibet maioris inæqualitatis, sed minor.

Demonstr.

constr. Quoniam *e* ad *f*, maior est, quàm, cui propior
p. h. potest esse *C+D* ad *D*: diuidendo, *e—f* ad *f*, maior est, quàm cui propior potest esse *C* ad *D*.
constr. Item quoniam *g* ad *h*, minor est, quàm cui pro-
p. h. pior potest esse *C+D* ad *D*: diuidendo *g—h* ad *h* minor est, quàm cui propior potest esse *C* ad *D*.
hypoth. Sed *A* ad *B*, quasi eadem est, quæ *C* ad *D*: er-
def. 4. h. go *A* ad *B*, potest esse minor, quàm *e—f* ad *f*; &
p. h. maior, quàm *g—h* ad *h*. Ergo componendo *A+B* ad *B* potest esse minor, quàm *e* ad *f*; &
def. 4. h. maior, quàm *g* ad *h*. Ergo *A+B* ad *B*, quasi eadem est, quæ *C+D* ad *D*. Quod &c.

Quare &c.

Theor.

Theor. 24. Prop. 24.

RAtiones quasi eædem, diuidendo, sunt quasi eædem.

Hypoth.

Sint rationes quasi eædem *A* ad *B*, & *C* ad *D*.

Dico diuidendo, quasi easdem esse rationes *A* — *B* ad *B*, & *C* — *D* ad *D*.

Præpar.

Assumatur *e* ad *f*, quęlibet ratio maior, quàm cui propior potest esse *C* — *D* ad *D*: & assumatur *g* ad *h*, quælibet minor.

Demonstr.

constr. Quoniam *e* ad *f*, maior est, quàm, cui propior
p. h. potest esse *C* — *D* ad *D*; & *g* ad *h*, minor: ergo componendo *e* + *f* ad *f*, maior est, quàm cui propior potest esse *C* ad *D*; & *g* + *h* ad *h*, minor.
hyp. Sed *A* ad *B*, quasi eadem est, quæ *C* ad *D*: er-
def. 4. h. go *A* ad *B* potest minor esse, quàm *e* + *f* ad *f*; &
p. h. maior, quàm *g* + *h* ad *h*. Ergo diuidendo *A* — *B* ad *B*, potest minor esse, quàm *e* ad *f*; & maior,
def. 4. h. quàm *g* ad *h*. Ergo *A* — *B* ad *B*, quasi eadem est, quæ *C* — *D* ad *D*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 25. Prop. 25.

RAtiones quasi eędem, per conuersionem rationis, sunt quasi eędem.

Hypoth.

Hypoth.

Sint rationes quasi eædem, *A* ad *B*, & *C* ad *D*.

Dico per conuersionem rationis, quasi easdem esse rationes *A* ad *A*—*B*, & *C* ad *C*—*D*.

Demonstr.

hyp.	*A*; *B*: quasi *C*: *D*.
24. *h.*	*A*—*B*; *B*: quasi *C*—*D*; *D*.
20. *h.*	*B*; *A*—*B*: quasi *D*; *C*—*D*.
21. *h.*	*A*; *A*—*B*: quasi *C*; *C*—*D*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 26. Propos. 26.

SI quotcunque quantitates fuerint quasi proportionales, colligendo, quasi proportionales erunt, omnes antecedentes, ad omnes consequentes.

Hypoth.

A; *B*: quasi *C*; *D*:

Dico *A*+*C*; *B*+*D*: quasi *C*; *D*.

Demonst.

hypoth.	*A*; *B*: quasi *C*; *D*.
22. *h.*	*A*; *C*: quasi *B*; *D*.
23. *h.*	*A*+*C*; *C*: quasi *B*+*D*; *D*.
22. *h.*	*A*+*C*; *B*+*D*: quasi *C*: *D*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 27. Pro. 27.

SI prima ad secundam quasi proportionalis fuerit, sicut tertia ad quartam; & quinta ad secundam, quasi sicut sexta

ſexta ad quartam: erit prima cum quinta ad ſecundam, quaſi ſicut tertia cum ſexta ad quartam.

Hypoth.

A; *B*: quaſi *C*; *D*.
E; *B*: quaſi *F* ad *D*.
Dico *A* + *E*; *B*: quaſi *C* + *F*; *D*.

Præpar.

hypoth.	*A*; *B*: quaſi *C*; *D*.
22. *h.*	*A*; *C*: quaſi *B*; *D*.
hypoth.	*E*; *B*: quaſi *F*; *D*.
22. *h.*	*E*; *F*: quaſi *B*; *D*.
19. *h.*	*A*; *C*: quaſi *E*; *F*.
22. *h.*	*A*; *E*: quaſi *C*; *F*.
23. *h.*	*A* + *E*; *E*: quaſi *C* + *F*; *F*.
hypoth.	*E*; *B*: quaſi *F*; *D*.
21. *h.*	*A* + *E*; *B*: quaſi *C* + *F*; *D*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 28. *Prop.* 28.

QVaſi partes, cum quaſi æquemultiplicibus, in quaſi eadem ſunt ratione, ſi prout ſibi mutuò reſpondent, ita ſumantur.

Hypoth.

A; *B*: quaſi tripla.
C; *D*: quaſi tripla.
Dico *A*; *C*: quaſi *B*; *D*.

De-

Demonstr.

18. *h.*	*A*; *B*: quasi *C*; *D*.
22. *h.*	*A*; *C*: quasi *B*; *D*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 29. Prop. 29.

SI totam ad totam quasi proportionalis fuerit, vt ablata ad ablatam: & reliqua ad reliquam, quasi proportionalis erit, vt tota ad totam.

Hypoth.

A; *B*: quasi *C*: *D*.

Dico *A*—*C*; *B*—*D*: quasi *A*; *B*.

Demonstr.

hypoth.	*A*; *B*: quasi *C*; *D*.
22. *h.*	*A*; *C*: quasi *B*; *D*.
25. *h.*	*A*; *A*—*C*: quasi *B*; *B*—*D*.
22. *h.*	*A*—*C*; *B*—*D*: quasi *A*; *B*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 30. Prop. 30.

QVantitates quasi proportionales, & per homologiam, sunt quasi proportionales.

Demonstr.

Nam conuertendo, quasi proportionales fiunt, 20.*h*: & colligendo, 26, & 27. *h*: & æquemultiplicando, & æquepartiendo, 28.*h*: & permutando, 22.*h*: & diuidendo, 24.*h*: & componendo, 23.*h*: & homologas ab ho-

Q mologis

mologis auferendo, 29.*h*: & per conuerſionem rationis, 25.*h*: & ex æquali, 21.*h*: & coniunctis omnifariam argumentis huiuſmodi, quocunque ordine, per homologiam, quaſi proportionales fiunt.

Theor. 31. *Prop.* 31.

QVaſi æquales, ad quaſi æquales, rationes habent, vel quaſi infinitas vtraſque, vel quaſi nullas, vel quaſi eaſdem inter ſe.

Hypoth. comm.

A, *B* ſunt quaſi æquales.

C, *D* ſunt quaſi æquales.

Hypoth. p. caſus.

A; *C*: eſt quaſi infinita.

Dico *B*; *D*: eſſe quaſi infinitam.

Præpar.

Aſſumatur *e* ad *f*, quælibet ratio: vnde fit componendo *e*+*f* ad *f*: deinde per conuerſionem rationis *e*+*f* ad *e*: & conuertendo *e* ad *e*+*f*.

Demonſtr.

def.3.b.	*B*; *A*: poteſt maior eſſe, quàm *e*; *e*+*f*.
def.p.b.	*A*; *C*: poteſt maior eſſe, quàm *e*+*f*; *f*.
4. *b.*	*B*; *C*: poteſt maior eſſe, quàm *e*; *f*.
def.p.b.	*B*; *C*: ratio eſt quaſi infinita.
def.p.b.	*B*; *C*: poteſt maior eſſe, quàm *e*+*f*; *f*.
def.3.b.	*C*; *D*: poteſt maior eſſe, quàm *e*; *e*+*f*.
4. *b.*	*B*; *D*: poteſt maior eſſe, quàm *e*; *f*.

B; *D*:

def. p. h. | B; D: ratio est quasi infinita. Quod &c.

Hypoth. 2. casus.

A; C: est quasi nulla.

Dico B; D: esse quasi nullam.

Demonstr.

10. h. | C; A: quasi infinita.

sup. | D; B: quasi infinita.

7. h. | B; D: quasi nulla. Quod &c.

Hypoth. 3. casus.

A; C: neq; quasi infinita, neq: quasi nulla est.

Dico B; D: quasi esse A; C.

Demonstr.

B ad D, neque est quasi infinita, neque quasi nulla:

sup. | alioquin A ad C esset quasi infinita, vel quasi nulla, contra hypothesim.

19. h. | A; B: quasi C; D.

22. h. | A; C: quasi B; D. Quod &c.

Quare &c.

Theorema 32. Prop. 32.

SI prima ad secundam, rationem habuerit quasi infinitam; item ad tertiam, rationem quasi infinitam: habebit & ad vtriusque summam, & ad vtriusque differentiam, rationem quasi infinitam.

Hypoth.

A; B: quasi infinita.

A; C: quasi infinita.

Dico $A; B + C$: quasi infinitam esse.

Et $A; B - C$: quasi infinitam esse.

Demonstr.

hypoth.	$A; B$: quasi infinita.
8. *h.*	$A + B; B$: quasi infinita.
9. *h.*	$A + B; A$: quasi æqualis.
hypoth.	$A; C$: quasi infinita.
31. *h.*	$A + B; C$: quasi infinita.
8. *h.*	$A + B + C; C$: quasi infinita.
9. *h.*	$A + B + C; A + B$: quasi æqualis.
sup.	$A + B; A$: quasi æqualis.
18. *h.*	$A + B + C; A$: quasi æqualis.
16. *h.*	$B + C; A$: quasi nulla.
10. *h.*	$A; B + C$: quasi infinita. Quod &c.
sup.	$A + B; C$: quasi infinita.
8. *h.*	$A + B - C; C$: quasi infinita.
7. *h.*	$C; A + B - C$: quasi nulla.
11. *h.*	$A + B; A + B - C$: quasi æqualis.
sup.	$A; A + B$: quasi æqualis.
18. *h.*	$A + B - C; A$: quasi ęqualis.
17. *h.*	$A + B - C; B - C$: quasi infinita.
8. *h.*	$A; B - C$: quasi infinita. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 33. Propos. 33.

SI fuerint tres termini, primus indeterminatus, reliqui duo determinati; fuerit autem primus ad secundum quasi

quasi æqualis: habebit secundus ad tertium eandem rationem, quàm quasi habet primus.

Hypoth.

Tres termini sunt, primus indeterminatus *A*; reliqui duo determinati, *b*, & *c*: & est *A* ad *b*, quasi æqualis.

Dico *b* ad *c* eandem esse rationem, quàm quasi habet *A* ad *c*.

Præpar.

Assumatur *d*, æqualis ipsi *c*.

Demonst.

hypoth.	*A*; *b*: quasi æqualis.
constr.	*c*; *d*: æqualis.
def.4.h.	*A*; *b*: quasi *c*; *d*.
22. *h.*	*A*; *c*: quasi *b*; *d*.
8. 5.	*b*; *d*: *b*; *c*.
19. *h.*	*A*; *c*: quasi *b*; *c*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 34. Prop. 34.

Tota ad vnitatem, quasi est infinita.

Demonstr.

Nam tota, cum non dicatur, cuius numeri tota sit; est indeterminata: ideoque totæ ad vnitatem, ratio est indeterminata. Cumque possit dici, cuius numeri tota sit; est determinabilis: ideoque totæ ad vnitatem, ratio est determinabilis. Cum denique possit dici eius numeri tota, qui maior sit, quàm vt ad vnitatem, habeat quamlibet rationem

nem datam; qui numerus, ipsa sui ipsius est tota: erit ratio totæ ad vnitatem, maior, quàm data quælibet. Ergo tota ad vnitatem, quasi est infinita.
def.p.h.

Theor. 35. Prop. 35.

SEsquitota ad vnitatem, quasi est infinita. Item semitota.

Demonstr.

34. h. Tota ad vnitatem, quasi est infinita: ergo com-
8. h. ponendo, sesquitota ad vnitatem, quasi est infi-
8. h. nita. Item diuidendo, semitota ad vnitatem, quasi est infinita.

Theor. 36. Prop. 36.

TOta, sesquitota, & semitota, quasi sunt æquales inter se.

Demonstr.

35. h. Sesquitota ad vnitatem, quasi est infinita: ergo
9. h. per conuersionem rationis, sesquitota ad totam,
34. h. quasi est æqualis. Rursum tota ad vnitatem quasi
9. h. sit infinita: ergo per conuersionem rationis, tota
18. h. ad semitotam, quasi est æqualis. Ergo sesquitota ad semitotam, quasi est æqualis.

Theor. 37. Prop. 37.

TOta quantumlibet ordinata ad vnitatem, quasi est infinita. Item sesquitota, & semitota.

Dico

Dico $t3$; u: quasi infinitum.

Demonstr.

34. *h.* | t ; u: quasi infinita.
def.6.p. | $t3$; u: triplicata t ; u.
12. *h.* | $t3$; u: quasi infinita. Quod &c.
ex 35. h. | Similiter ostendetur $q3$; u: quasi infinita.
| Item $m3$; u: quasi infinita.

Quare &c.

Theor. 38. *Prop.* 38.

Totarum inæqualiter ordinatarum, magis ordinata, ad minùs ordinatam, quasi est infinita. Item sesquitotarum, & semitotarum.

Hypoth.

$t5$ magis est ordinata, quàm $t3$.
Dico $t5$; $t3$: quasi infinitam.

Demonstr.

34. *h.* | t ; u: quasi infinita.
def.6.p. | $t5$; $t4$: t ; u.
def.6.p. | $t4$; $t3$: t ; u.
13. 5. | $t5$; $t4$: quasi infinita.
13. 5. | $t4$; $t3$: quasi infinita.
12. *h.* | $t5$; $t3$: quasi infinita. Quod &c.

Similiter ostendetur $q5$; $q3$: quasi infinita.
Et $m5$; $m3$: quasi infinita.
Quare &c.

Theor.

Theor. 39. *Prop.* 39.

Æ Quoordinatæ, tota, semitota, & sesquitota, sunt quasi æquales.

Dico $t3$, $q3$, $m3$, quasi æquales esse.

Demonstr.

36. *h.*	t; q: quasi æqualis.
3. *p.*	$t3$; $q3$: triplicata t; q.
21. *h.*	$t3$; $q3$: quasi æqualis. Quod &c.
sup.	$q3$; $m3$: quasi æqualis. Quod &c.
18. *h.*	$t3$; $m3$: quasi æqualis. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 40. *Prop.* 40.

Tota magis ordinata, ad aggregatum ex totis minùs ordinatis, quasi est infinita. Item semitota, ad aggregatum ex semitotis: & sesquitota, ad aggregatum ex sesquitotis.

Hypoth.

Esto tota magis ordinata $t3$: qua minùs ordinatæ. $t2$, t, & rationalis u: quarum aggregatum $5t2 + 3t + 4u$.

Dico $t3$; $5t2 + 3t + 4u$: quasi esse infinitam.

Demonstr.

38. *h.*	$t3$; $t2$: quasi infinita.
32. *h.*	$t3$; $5t2$: quasi infinita.
38. *h.*	$t3$; t: quasi infinita.
32. *h.*	$t3$; $3t$: quasi infinita.

$t3$;

37. b. | $t3$; u: quasi infinita.
32. b. | $t3$; $4u$: quasi infinita.
32. b. | $t3$; $5t2 + 3t + 4u$: quasi infinita. Quod &c.

Similiter ostendetur, $m3$; $5m2 + 3m + 4u$: quasi infinita. Quod &c.

Item, $q3$; $5q2 + 3q + 4u$: quasi infinita. Quod &c. Quare &c.

Theor. 41. *Prop.* 41.

TOta magis ordinata, sibi ipsi, & alijs minùs ordinatis, additis, vel subtractis, quasi est æqualis. Item semitota: & sesquitota.

Hypoth.

Tota vel semitota, vel sesquitota magis ordinata esto A: quacum additæ minùs ordinatæ, sunto B: & subtractæ C.

Dico A, $A + B$, $A - C$, $A + B - C$, quasi æquales esse.

Demonstr.

40. b. | A; B: quasi infinita.
8. b. | $A + B$; B: quasi infinita.
9. b. | $A + B$; A: quasi æqualis. Quod &c.
40. b. | A; C: quasi infinita.
9. b. | A; $A - C$: quasi æqualis. Quod &c.
32. b. | A; $B - C$: quasi infinita.
8. b. | $A + B - C$; $B - C$: quasi infinita.
9. b. | $A + B - C$; A: quasi æqualis. Quod &c.

18. *h.* | $A+B-C$, $A+B$, $A-C$, quasi sunt æquales. Quod &c.

Quare &c.

Theor 42. *Prop.* 42.

QVælibet quadratrix quasi est æqualis ad totam vnitate plus ordinatam, quàm sit eius basis. item ad semitotam: & ad sesquitotam.

Hypoth.

Esto quadratrix *A*: & esto tota *B*, vnitate plus ordinata, quàm basis quadratricis *A*.

Dico *A* ad *B*, quasi æqualem esse.

Demonstr.

22. 2. | *A*, est æqualis ipsi *B*, demptis, additisque aliqualiter acceptis totis, non plus ordinatis, quàm
hypoth. | basis *A*. Sed *B*, est tota vnitate plus ordinata, quàm basis *A*; ideòque totæ, non plus ordinatę, quàm basis *A*, sunt minùs ordinatæ, quàm *B*. Ergo *A*; est æqualis ipsi *B*, denptis, additisque aliqualiter acceptis totis, minùs ordinatis, quàm
41. *h.* | *B*. Sed & *B*, demptis, additisque aliqualiter acceptis totis, minùs ordinatis, quàm *B*, quasi est
18. *h.* | æqualis ipsi *B*. Ergo *A*, quasi est æqualis ipsi *B*. Quod &c.

31. 2. | Idem, & eodem modo demonstraretur, si *B*
32. 2. | esset semitota: necnõ si *B* esset sesquitota. Quę &c.

Quare &c.

Theor. 43. Prop. 43.

QVælibet quadratrix, ad totas non plus ordinatas, quàm ſit eius baſis, quomodolibet acceptas, quaſi eſt infinita. item ad ſemitotas: necnon ad ſeſquitotas.

Hypoth.

Eſto quadratrix *A*: & in *B* ſint ſumptæ totæ quomodolibet, vel ſemitotæ, vel ſeſquitotæ.

Dico *A* ad *B* quaſi infinitam eſſe.

Præpar.

Sumatur *C*, tota, vnitate plus ordinata, quàm baſis quadratricis *A*: vel ſemitota, vel ſeſquitota.

Demonſtr.

41. *b.* | *C*; *B*: quaſi infinita.
42. *b.* | *A*; *C*: quaſi æqualis.
31. *b.* | *A*; *D*: quaſi infinita. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 44. Prop. 44.

RAtionis quaſi infinitæ diuiſo antecedente per datum numerum, ratio eſt quaſi infinita.

Hypoth.

A ad *B*, quaſi eſt infinita.

Dico ſubtriplam *A* ad *B*, quaſi infinitam eſſe.

Præpar.

Aſſumatur quælibet ratio *c* ad *d*.

Demonstr.

hypoth.	*A*; *B*: quasi infinita.
def.p.h.	*A*; *B*: potest maior esse, quàm 3*c*; *d*.
p. h.	*A*; 3*c*: potest maior esse, quàm *B*; *d*.
15. 5.	*A*; 3*c*: subtripla *A*; *c*.
13. 5.	Subtripla *A*; *c*: potest maior esse, quàm *B*; *d*.
p. h.	Subtripla *A*; *B*: potest maior esse, quàm *c*; *d*.
def.p.h.	Subtripla *A*; *B*: quasi est infinita. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 45. Prop. 45.

RAtionis quasi infinitæ multiplicato consequente, ratio est quasi infinita.

Hypoth.

A ad *B*, quasi est infinita.

Dico *A* ad duplam *B*, quasi esse infinitam.

Præpar.

Assumatur quælibet ratio *c* ad *d*.

Demonstr.

hypoth.	*A*; *B*: quasi infinita.
def.p.h.	*A*; *B*: potest maior esse, quàm 2*c*; *d*.
p. h.	*A*; 2*c*: potest maior esse, quàm *B*; *d*.
15. 5.	*B*; *d*: 2*B*; 2*d*.
13. 5.	*A*; 2*c*: potest maior esse, quàm 2*B*; 2*d*.
p. h.	*A*; 2*B*: potest maior esse, quàm 2*c*; 2*d*:
15. 5.	2*c*; 2*d*: *c*; *d*.
13. 5.	*A*; 2*B*: potest maior esse, quàm *c*; *d*.

A; 2*B*:

def.p.h.	A; $2B$: quasi est infinita. Quod &c.

Quare &c.

Theorema 46. Prop. 46.

Ratio composita ex duabus rationibus, altera, quasi quadam proposita, altera, quasi infinita; quasi est infinita.

Hypoth.

A; B: quasi quædam proposita.
B; C: quasi infinita.
Dico A; C: quasi esse infinitam.

Præpar.

Assumatur quælibet ratio, d ad e: item assumatur quælibet d ad f, minor, quàm, cui quasi eadem esse dicitur A ad B.

Demonstr.

hypoth.	B; C: quasi est infinita.
def.p.h.	B; C: potest maior esse, quàm f; e.
def.3.h.	A; B: potest maior esse, quàm d; f.
4. h.	A; C: potest maior esse, quàm d; e.
def.p.h.	A; C: quasi est infinita. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 47. Prop. 47.

Quadratrices in eadem basi iacentes, inter se sunt quasi æquales.

Hy-

Hypoth.

Sint in eadem basi quadratrices *A*, *B*.
Dico *A*, *B*, quasi æquales esse.

Præpar.

Sumatur *C*, tota, vnitate plus ordinata, quàm sit basis ipsarum *A*, *B*.

Demonstr.

43. *h.* | *A*; *C*: quasi æqualis.
43. *h.* | *B*; *C*: quasi æqualis.
18. *h.* | *A*; *C*: quasi æqualis. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 48. *Propos.* 48.

SVb quadratrices in eadem basi iacentes, sunt quasi æquales.

Hypoth.

Sint in eadem basi subquadratrices *A*, *B*.
Dico *A*, *B*, quasi æquales esse.

Præpar.

Sumantur homonymæ quadratrices *C*, *D*.

Demonstr.

def.13.2 | *C* ad *A*, æquemultiplex est, vt *D* ad *B*.
15. 5. | *C*; *A*: *D*; *B*.
16. 5. | *C*; *D*: *A*; *B*.
47. *h.* | *C*; *D*: quasi ęqualis.
19. *h.* | *A*; *B*: quasi æqualis. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 49. *Prop.* 49.

IN diuersis basibus, quadratrix in magis ordinata, ad quadratricem in minùs ordinata, quasi est infinita.

Hypoth.

Sint quadratrices *A*, *B*, in diuersis basibus: *A*, in magis ordinata basi, quàm *B*.

Dico *A* ad *B*, quasi esse infinitam.

Præpar.

Assumatur tota *C*, vnitate plus ordinata, quàm sit basis quadratricis *A*: & tota *D*, vnitate plus ordinata, quàm sit basis quadratricis *B*.

Demonstr.

hypoth. | Quoniam *A* est in basi magis ordinata, quàm
38. *b.* | *B*: ergo etiam *C* est magis ordinata tota, quàm
42. *b.* | *D*: ergo *C* ad *D*, quasi est infinita. Sed *C*, *A*,
31. *b.* | sunt quasi æquales: & *D*, *B*, quasi æquales. Ergo *A* ad *B*, quasi est infinita. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 50. *Prop.* 50.

IN diuersis basibus, quęlibet massa in magis ordinata, ad quamlibet massam, in minùs ordinata, quasi est infinita.

Hypoth.

Sint massæ *A*, *B*, in diuersis basibus: *A* in magis ordinata basi, quàm *B*.

Dico *A* ad *B*, quasi esse infinitam.

Præ-

Præpar.

Assumantur quadratrices *C*, *D*: *C* quidem homonyma ipsi *A*; & *D*, ipsi *B*.

Demonstr.

hypoth. Quoniam *A*, est in basi magis ordinata, quàm *B*: etiam *C*, est in basi magis ordinata, quàm
49. *h.* *D*: & *C* ad *D*, quasi est infinita. Est autem ratio *A* ad *C*, quædam proposita, quàm habent propositi numeri multiplicantes homonymam
46. *h.* speciem: ergo ex æquali, *A* ad *D*, ratio est quasi infinita. Item *D* ad *B*, ratio est quædam proposita, quàm habent propositi numeri multipli-
46. *h.* cantes hononymam speciem: ergo ex æquali, *A* ad *B*, ratio est quasi infinita. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 51. Prop. 51.

SPecies in eadem basi iacentes, sunt reciprocè quasi proportionales, vt numeri, in tabula multiplicium, similiter iacentes.

Hypoht.

Sint in eadem basi species *A*, *B*: & sint numeri similiter iacentes, in tabula multiplicium; *c*. similiter, atque *A*; & *d*, similiter, atque *B*.

Dico *A*; *B*: quasi *d*; *c*.

Præpar.

Sumantur subquadratrices *E*, *F*: *E* quidem homonyma ipsi *A*; & *F*, ipsi *B*.

De-

Demonstr.

deff. 11. *p.* & 2.	*A*; *E*: *u*; *c*.
48. *h.*	*E*; *F*: quasi æqualis.
deff. 11. *p.* & 2.	*F*; *B*: *d*; *u*.
21. *h.*	*A*; *B*: quasi *d*; *c*. Quod &c. Quare &c.

Theor. 52. *Prop.* 52.

MAssæ in eadem basi iacentes, quasi eamdem habent rationem compositam, ex directa suorum numerorum, & reciproca numerorum in tabula multiplicium similiter iacentium.

Hypoth.

Sint in eadem basi, massæ *A*, *B*: quarum numeri *c*, *d*: *c* quidem, qui multiplicans homonymam speciem *A*; facit massam *A*; & *d*, qui multiplicans homonymam speciem *B*, facit massam *B*. Et sint numeri *e*, *f*, similiter iacentes in tabula multiplicium; *e* quidem, sicut *A*; & *f*, sicut *B*.

Dico *A*; *B*: quasi *c*; *d*, + *f*; *e*.

Præpar.

Sumantur species homonymæ *G*, *H*: *G* quidem ipsi *A*; & *H*, ipsi *B*.

Demonstr.

hypoth.	*A*; *G*: *c*; *u*.
51. *h.*	*G*; *H*: quasi *f*; *e*.
hypoth.	*H*; *B*: *u*; *d*.
21. *h.*	*A*; *B*: quasi *c*; *d*, + *f*; *e*. Quod &c. Quare &c.

Proplema primum Prop. 53.

DAta ratione; datoque numero pariter pari: subtotuplicatam rationem inuenire, quotus est datus numerus.

Hypoth.

Sit data ratio *a* ad *b*: datusque numerus *c*, pariter par.

Oportet rationem inuenire, subtotuplicatam rationis, *a* ad *b*, quotus est *c*.

Constr.

Subdiuidatur numerus *c*, vsque ad vnitatem: & sit *c* ad *d*, duplus: & *d* ad *f*, duplus: & *f* ad vnitatem, duplus. Deinde sumatur, inter *a*, *b*, media proportionalis *g*: & inter *a*, *g*, media proportionalis *h*: & inter *a*, *h*, media proportionalis *i*: vt fiant sumptiones totidem, quot sunt, numeri *c* diuisiones bifariam, vsque ad vnitatem.

Dico *a*; *i*: subtotuplicatam *a*; *b*, quotus est *c*.

Demonstr.

constr. | *a*; *b*: duplicata *a*; *g*, sicut *c*; *d*: duplus.
constr. | *a*; *g*: duplicata *a*; *h*, sicut *d*; *f*: duplus.
constr. | *a*; *h*: duplicata *a*; *i*, sicut *f*; *u*: duplus.
p. p. | *a*; *b*: multiplicata *a*: *i*, sicut *c*; *u*: multiplus.
| *a*; *i*: subtotuplicata *a*; *b*, quotus est *c*. Quod erat faciendum.

Quare data ratione, datoque numero pariter pari, subtotuplicatam rationem inuenimus, quotus est datus numerus.

Probl. 2. Prop. 54.

DAta ratione inæqualitatis; & proposito numero ordinis potestatum: numerum inuenire, pro quo sesquitota, & semitota æqueordinatæ, sunt ad inuicem propiores æqualitati.

Hypoth.

Sit data ratio inæqualitatis a, ad b: & sit a, maior, quàm b: sitque datus numerus quinarius.

Oportet numerum inuenire, quo quo sesquitota quinta, ad semitotam quintam, minor est, quàm vt a ad b: & semitota quinta, ad sesquitotam quintam, maior, quàm vt b ad a.

Constr.

Sumatur numerus pariter par, nõ minor, quàm
53. b. datus quinarius: & sit sumptus octonarius: & suboctuplicata ratio inueniatur, rationis a ad b; quę sit a ad c: & sumatur numerus d, maior ad binarium, quàm vt a ad a---c: qui, dempto binario, relinquatur e: & inter d, e, sumatur nume-
deff. 18. & 19. 2 rus f: pro quo, vt radice tota; semitota est e; sesquitota d.

Dico $d5$; $e5$: minorem esse, quàm a; b.

Et $e5$; $d5$: maiorem, quàm b; a.

Demonstr.

constr. d; 2: maior, quàm a; a—c.
3. b. d; e: minor, quàm a; c.
4. b. $d5$; $e5$: minor, quàm $a5$; $c5$.

5. *h.* | $a5$; $c5$: minor, quàm $a8$; $c8$.
constr. | $a8$; $c8$: a; b.
13. 5. | $d5$; $e5$: minor, quàm a; b. Quod &c.
2. *h.* | $e5$; $d5$: maior, quàm b; a. Quod &c.

Quare &c.

Probl. 3. Prop. 55.

Data ratione; & propositis ordinibus potestatum inæqualibus: numerum inuenire, pro quo, plus ordinata potestas, ad minùs ordinatam, maior est, quàm in data ratione.

Hypoth.

Sit data ratio, a ad b: sint propositi ordines potestatum inæquales, quinarius, & binarius.

Oportet numerum inuenire, pro quo, potestas quinta ad secundam, maior est, quàm vt a ad b.

Constr.

Sumatur numerus c, in serie tertiarum potestatum ab omnibus numeris, maior ad vnitatem, quàm vt a ad b: numeri autem c, sit radix d.

Dico, pro d radice, $d5$; $d2$: maiorem esse, quàm a; b.

Demonstr.

constr. | c: $d3$.
8. 5. & *def. 6. p.* | c; u: $d3$; u: $d5$; $d2$.
constr. | c; u: maior, quàm a; b.
13. 5. | $d5$; $d2$: maior, quàm a; b. Quod &c.

Quare &c.

Probl. 4. Prop. 56.

DAta ratione; propositisque ordinibus potestatum inæqualibus: numerum inuenire, pro quo, semitota plus ordinata, ad sesquitotam minùs ordinatam, maior est, quàm in data ratione.

Hypoth.

Sit data ratio a ad b: sintque propositi ordines potestatum, quinarius, atque ternarius.

Oportet numerum inuenire, pro quo, semitota quinta ad sesquitotam tertiam, maior est, quàm vt a ad b.

Constr.

Inueniatur *per* 55.*h.* numerus c, pro quo, semitota d: & semitota quinta $d5$, ad semitotam tertiam $d3$, maior est, quàm vt $a+b$ ad b. Inueniatur deinde *per* 54.*h.* numerus e, non minor, quàm c; pro quo, semitota m, & sesquitota q; & $m3$ ad $q3$, maior est, quàm vt a ad $a+b$.

Dico, pro numero e radice, $m5$; $q3$: maiorem esse, quàm a; b.

Demonstr.

constr.	e: non minor, quàm c.
def. 18.2	m: non minor, quàm d.
5. *h.*	$m5$; $d5$: non minor, quàm $m3$; $d3$.
p. h.	$m5$; $m3$: non minor, quàm $d5$; $d3$.
constr.	$d5$; $d3$: maior, quàm $a+b$; b.
13. 5.	$m5$; $m3$: maior, quàm $a+b$; b.
constr.	$m3$; $q3$: maior, quàm a, $a+b$.
4. *b.*	$m5$; $q3$: maior, quàm a; b. Quod &c.

Quare &c.

Probl. 5. Prop. 57.

DAtis duabus rationibus; & propositis duobus inæqualibus ordinibus potestatum: numerum inuenire, pro quo, ratio composita ex vna data ratione, & ex ratione semitotæ plus ordinatæ, ad sesquitotam minùs ordinatam, maior est, quàm altera data ratio.

Hypoth.

Sint datæ rationes, *a* ad *b*, & *c* ad *d*: & sint propositi ordines inæquales, quinarius, & binarius.

Oportet numerum inuenire, pro quo, ratio composita ex *a* ad *b*, & ex semitotæ quintæ ad sesquitotam secundam, maior est, quàm *c* ad *d*.

Constr.

56. *h.* | Fiat vt *b* ad *a*, ita *d* ad *e*: & inueniatur *f* numerus, pro quo, semitota *g*, sesquitota *h*; & *g5* ad *h3*, maior, quàm *c* ad *e*.

Dico, pro *f* radice, *a*; *b*, + *g5*; *h3*: maiorem esse, quàm *c*; *d*.

Demonstr.

constr. | *g5*; *h3*: maior, quàm *c*; *e*.
constr. | *a*; *b*: *c*; *d*.
4. *h.* | *a*; *b*, + *g5*; *h3*: maior, quàm *c*; *d*. Quod &c.

Quare &c.

Probl. 6. Prop. 58.

DAta ratione inæqualitatis; & propositis duabus in eadem basi iacentibus quadratricibus: numerum in-

inuenire, pro quo quadratrices propositæ, sunt propiores æqualitati, quàm in data ratione.

Hypoth.

Sit data ratio inæqualitatis *a* ad *b*: & sit *a* maior, quàm *b*: sintque propositæ in quinta basi, duæ quadratrices *c*, *d*.

Oportet numerum inuenire, pro quo, *c*, & *d*, sunt ad inuicem, minores, quàm vt *a* ad *b*; maiores, quàm vt *b* ad *a*.

Constr.

54. *b.* | Inueniatur numerus *e*, pro quo, semitota *f*, sesquitota *g*; & *f6* ad *g6*, maior est, quàm vt *b* ad *a*; & *g6* ad *f6*, minor, quàm vt *a* ad *b*.

Dico, pro *e* radice, quadratrices *c*, *d*, esse ad inuicem minores, quàm vt *a* ad *b*; maiores, quàm vt *b* ad *a*.

Demonstr.

30. 2. | *c*, est maior, quàm *f6*. minor, quàm *g6*.
30. 2. | *d*, est maior, quàm *f6*. minor, quàm *g6*.
8. 5. | *c*; *d*: maior, quàm *f6*. *g6*. minor, quàm *g6*; *f6*.
2. *b.* | *d*; *c*: minor, quàm *g6*. *f6*. maior, quàm *f6*; *g6*.
constr. | *f6*; *g6*: maior, quàm *b*; *a*.
constr. | *g6*; *f6*: minor, quàm *a*; *b*.
13. 5. | *c*; *d*: maior, quàm *b*; *a*. minor, quàm *a*; *b*. Quod &c.
13. 5. | *d*; *c*: minor, quàm *a*; *b*. maior, quàm *b*; *a*. Quod &c.

Quare &c.

Pro-

Probl. 7. Prop. 59.

DAta ratione; & propositis duabus non in eadem basi iacentibus quadratricibus: numerum inuenire, pro quo, quadratrix, quæ iacet in plus ordinata basi, ad alteram, maior est, quàm in data ratione.

Hypoth.

Sit data ratio *a* ad *b*: & propositæ sint quadratrices duæ *c*, *d*; *c*, in quinta basi; *d*, in secunda.

Oportet numerum inuenire, pro quo, *c* ad *d*, maior est, quàm vt *a* ad *b*.

Constr.

56. *b.* | Inueniatur numerus *e*, pro quo, semitota *f*, sesquitota *g*: & *f6* ad *g3*, maior sit, quàm vt *a* ad *b*.

Dico, pro *e* radice, *c*; *d*: maiorem esse, quàm *a*; *b*.

Demonstr.

30. 2. | *c*, maior est, quàm *f6*.
30. 2. | *d*, minor est, quàm *g3*.
8. 5. | *c*; *d*: maior est, quàm *f6*; *g3*. Quod &c.

Quare &c.

Probl. 8. Prop. 60.

DAta ratione; & propositis duabus non in eadem basi iacentibus massis: numerum inuenire, pro quo, massa, quæ iacet in plus ordinata basi, ad alteram, maior est, quàm in data ratione.

Hy-

Hypoth.

Sit data ratio *a* ad *b*: sintque duæ massæ *c*, *d*; *c* quidem, in quinta basi; *d*, in tertia.

Oportet numerum inuenire, pro quo, *c* ad *d*, maior est, quàm vt *a* ad *b*.

Constr.

Fiat, vt massa *c* ad sibi synonymam quadratricem *e*, sic *a* ad *f*: & vt synonyma ipsi *d* quadratrix *g*, ad ipsam *d*, sic fiat *h* ad *b*: & inueniatur numerus *i*, pro quo, quadratrix *e*, ad quadratricem *g*, maior est, quàm vt *f* ad *h*. *59. b.*

Dico pro *i* radice, massam *c* ad massam *d*, maiorem esse, quàm vt *a* ad *b*.

Demonstr.

constr. | *c*; *e*: *a*; *f*.
constr. | *e*; *g*: maior, quàm *f*; *h*.
constr. | *g*; *d*: *h*; *b*.
4. b. | *c*; *d*: maior, quàm *a*; *b*. Quod &c.

Quare &c.

Probl. 9. Prop. 61.

PRopositis in eadem basi iacentibus duabus massis; & datis duabus rationibus, non iisdem, quàm quasi habent ad inuicem massæ, sed maiore vna, minore altera: numerum inuenire, pro quo, massæ propositæ rationem habent minorem, quàm data maior, & maiorem, quàm data minor.

Hypoth.

Sint massę a, d: & sit ratio i ad s, quàm quasi habet a ad d: & sit e ad h, maior, quàm i ad s; & n ad r, minor.

Oportet numerum inuenire, pro quo, a ad d, est minor, quàm e ad h; & maior, quàm n ad r.

Conſtrr.

Sumatur ipsi a, synonyma quadratrix b; & ipsi d synonyma c. Fiat deinde.

a; b: e; f: i; k; n; o.

c; d: g; h: l; s: p; r.

Demonſtr.

hypoth.	a; d: quasi i; s.
def.17.5	a; b, $+b$; c, $+c$; d: quasi i; k, $+k$; l $+l$; s.
conſtr.	a; b: i; k.
conſtr.	c; d: l; s.
	b; c: quasi k; l.
27. h.	b; c: quasi æqualitas.
	k; l: æqualitas.
hypoth.	e; h: maior, quàm i; s.
def.17.5	e; f, $+f$; g, $+g$; h: maior, quàm i; k, $+k$; l, $+l$; s.
conſtr.	e; f: i; k.
conſtr.	g; h: l; s.
	f; g: maior, quàm k; l.
	f: maior, quàm g.
hypoth.	n; r: minor, quàm i; s.
def.17.5	n; o, $+o$; p, $+p$; r: minor, quàm i; k, $+$k; l, $+l$; s.
conſtr.	n; o: i; k.

p; r:

constr. | *p*; *r*: *l*; *s*.
| *o*; *p*: minor, quàm k; *l*.
| *o*: minor, quàm *p*.

Constr.

| Assumatur alterutra *f* ad *g*, vel *p* ad *o*, mi-
58. *b.* | nor: & sit assumpta *f* ad *g*. Et inueniatur nume-
| rus *t*, pro quo, quadratrix *b* ad quadratricem *c*,
| sit minor, quàm *f* ad *g*; maior, quàm *g* ad *f*.

Dico, pro *t*, massam *a*, ad massam *d*, minorem esse, quàm *e* ad *h*; & maiorem, quàm *n* ad *r*.

Demonstr.

constr. | *a*; *b*: *e*; *f*.
constr. | *b*; *c*: minor, quàm *f*; *g*.
constr. | *c*; *d*: *g*; *h*.
4. *b.* | *a*; *d*: minor, quàm *e*; *h*. Quod &c.
assumpt. | *f*; *g*: minor, quàm *p*; *o*.
2. *b.* | *g*; *f*: maior, quàm *o*; *p*.
constr. | *b*; *c*: maior, quàm *g*; *f*.
13. 5. | *b*; *c*: maior, quàm *o*; *p*.
constr. | *a*; *b*: *n*; *o*.
constr. | *c*; *d*: *p*; *r*.
4. *b.* | *a*; *d*: maior, quàm *n*; *r*. Quod &c.

Quare &c.

Petrus Mengolus, D. Iacobo Tesino Philosophiæ Doctori S. D.



Ibi primùm ex mea schola, Vir Excellentiss. atque alteri è schola Excellentissimi Cassini, amico nostro Io. Galeatio Manzio, contigit hoc elementum communicari: quod non, sine tuo, atque illius nomine, publicari oportebat; quoniam ipsi mihi tùm placere capit, cum vtramque vestrùm obtinuit approbationem. Postulabam honesti furis laudem. quòd, cum huiusmodi contemplationis aliena sit materia, eorum videlicet, quibus logarithmos debemus; cumque aliena sit etiam forma, & contemplationis modus, ipsissimus Euclidis in quinto: meum fecerim ex vtraque compositum. & quemadmodum, præcedentium elementorum in vtraque subiecti, & modi nouitate gloriabar: ita præsentis in vetustate, nouam laudem quærebam. Ille, visis definitionibus, & audita primarum octo propositionum, ex Euclide, traductione fideli; statim om-

nibus

nibus titulis propositionum, à me cursim lectis, & sine demonstratione facilem, pro sui acumine ingenij, praestabat assensum: & suggessit, potuisse totam hanc lucubrationem, vnica propositione comprehendi. Quæ demonstrat Euclides in quinto elementorum, de magnitudinibus maioribus, minoribus, æqualibus, æquemultiplicibus, & eandem, vel maiorem rationem habentibus: posse demonstrari de rationibus altioribus, depressioribus, ęquealtis, ęquemultiplicatis, & eamdem, vel maiorem logarithmicam rationem habentibus. *Cogitabam si possem huiusmodi vti consilio: tibique interim rure superuenienti capi communicare. Itaque singulis propositionibus & demonstrationibus, toto animo intendebas, & cum quinto Euclidis diligenter conferebas, cumq; duo inciderimus, in traducendo, difficiliora (vnum,* minoris inæqualitatis rationes, quæ, quò minores sunt, eò altiores dicuntur, pro maioribus magnitudinibus vsuuenire. *alterum*, rationem ex ratione subtrahi, vel decomponi, per suæ compositionem conuersæ:) *intellexi non esse operis dispendium, mutatis mutandis, ex Euclide integram traductionem perficere, & exhibere. Tuque ipse iustum furtum, & honestissimum probasti: quòd non ab*

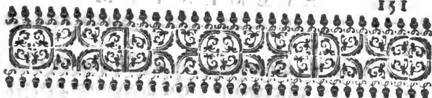
om.

omnibus facilè probarentur peculiares propositiones, quæ sub illa unica continentur. & certè à me non possent commodè allegari, ad alia in sequentibus elementis demonstranda. Quos ergo semel approbasti labores meos, vt amicis & communices, & commendes, enixè rogo: nam non mihi soli, non paucis, sed omnibus laboro.

Vale.



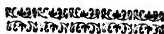
GEO:



GEOMETRIÆ SPECIOSÆ

ELEMENTVM QVARTVM.

DEFINITIONES.



1. DVarum rationum inæqualitatis, vtrarumque maioris, vel vtrarumque minoris, Altior, dicetur, ab æqualitate remotior.

2. Et Depreſſior, æqualitati propior.

3. Submultiplicata eſt ratio rationis, depreſſior, altioris, cum depreſſior, aliquoties compoſita, facit altiorem.

4. Multiplicata verò altior, depreſſioris; cum depreſſior, aliquoties compoſita, facit altiorem.

5. Ratio logarithmica dicetur, duarum rationum inęqualitatis, vtrarumque maioris, vel vtrarumque minoris, mutua quædam; ſecundùm altitudinem, vel depreſſionem habitudo.

6. Proportio logarithmica, dicetur, ſimilitudo logarithmarum rationum, vel ad inuicem, vel ad alias rationes.

7. Rationem logarithmicam habere inter ſe rationes

dicen-

dicentur, quæ multiplicatæ, possunt se mutuò, altitudine superare.

8. In eadem ratione logarithmicè, dicuntur esse rationes duæ, prima, ad secundam, atque duæ quantitates, prima, ad secundam: cum primæ rationis, quælibet multiplicata ratio, & primæ quantitatis æquemultiplex, à secundę rationis qualibet multiplicata, & à secundæ quantitatis ęquemultiplici, vel vnà deficiunt, vel vnà æquales sunt, vel vnà excedunt; ratio quidem, altitudine, & quantitas ipsâ quantitate.

9. Et dicetur prima ratio ad secundam, proportionalis logarithmicè, sicut prima quantitas ad secundam.

10. Cum verò primę rationis multiplicata ratio, altior fuerit, quàm multiplicata secundæ; multiplex autem primę quantitatis, non maior fuerit, quàm multiplex secundæ: dicetur logarithmica ratio rationum, maior, quàm ratio quantitatum.

11. Cumque è contra, multiplex primæ quantitatis, maior fuerit multiplici secundæ; multiplicata autem ratio primæ rationis, non altior, quàm multiplicata, secundæ: dicetur ratio quantitatum, maior, quàm logarithmica ratio rationum.

12. Rursum in eadem ratione logarithmicè, dicentur esse rationes quatuor prima ad secundam, atque tertia ad quartã: cum primæ, ac tertiæ, rationes æquemultiplicatæ, à secundæ, & quartæ, rationibus æquemultiplicatis, qualiscunque sit hæc multiplicatio, vtraque, ab vtraque, vel

vel vnà altiores sunt, vel vnà æquealtæ, vel vnà depressiores, si eę sumantur, quæ inter se respondent.

13. Eamdem autem habentes rationem logarithmicam, rationes, logarithmicè proportionales vocentur.

14. Cum verò æquemultiplicatarum, multiplicata primæ rationis altior fuerit, quàm multiplicata secundæ; multiplicata autem tertiæ, non altior fuerit, quàm multiplicata quartæ: tunc prima ratio ad secundam, maiorem rationem logarithmicam habere dicetur, quàm tertia ad quartam.

15. Homologæ rationes rationibus, aut quantitatibus dicuntur, antecedentes quidem antecedentibus, & consequentes consequentibus.

16. Homologia logarithmica est sumptio homologarum rationum, aut & quantitatum, vt in alia quadam logarithmica proportionalitate, fiant homologæ.

17. Alterna ratio logarithmica, est rationum sumptio antecedentis comparatæ ad antecedentem, & consequentis ad consequentem.

18. Inuersa ratio logaritmica, est rationum sumptio consequentis, ceu antecedentis, comparatæ ad antecedentem, velut ad consequentem.

19. Compositio rationis logarithmicæ, est sumptio compositæ ex rationibus antecedenti, & consequenti, ceu vnius ad ipsam consequentem.

20. Diuisio rationis logarithmicæ, est sumptio rationis, quacum composita consequens facit antecedentem,

ad ipſam conſequentem.

21. Conuerſio rationis logarithmicæ, eſt ſumptio antecedentis, ad eam, quacum compoſita conſequens facit ipſam antecedentem.

22. Ex æqualitate ratio logarithmica eſt, ſi plures duabus ſint rationes, & his, vel quantitates, vel aliæ rationes, multitudine pares, quæ binæ ſumatur, & in eadem ratione logarithmica: cum vt in primis rationibus, prima logarithmicè ſe habet ad vltimam, ſic in ſecundis vel rationibus, vel quantitatibus, prima ad vltimam ſeſe habuerit. Vel aliter ſumptio extremarum, per ſubductionem mediarum.

23. Ordinata proportio logarithmica eſt, tribus poſitis rationibus, & alijs, vel quantitatibus, vel rationibus, quę ſint his multitudine pares: cum, vt in primis rationibus, logarithmicè ſe habet antecedens, ad conſequentem; ita in ſecundis, vel quantitatibus, vel rationibus, antecedens ad conſequentem: & vt in primis, conſequens, ad aliam quampiam; ſic in ſecundis, conſequens, ad aliã quampiam.

24. Perturbata autem logarithmica proportio eſt: cum vt in primis, logarithmicè ſe habet antecedens, ad conſequentem; ita in ſecundis, antecedens ad conſequentem: & vt in primis, conſequens, ad aliam quampiam; ſic in ſecundis, alia quæpiam, ad antecedentem.

Theor.

Theor. 1. Prop. 1.

SI sint quotcunque rationes, quotcunque rationum, æqualium numero, singulæ singularum ęquemultiplicatæ: quàm multiplicata est vna, vnius; tàm multiplicata est composita omnium, compositæ omnium.

Hypoth.

*a*3; *b*3: multiplicata *a*; *b*.

*c*3; *d*3: æquemultiplicata *c*; *d*:

Dico *a*3; *b*3, + *c*3; *d*3: æquemultiplicatam *a*; *b*, + *c*; *d*.

Demonstr.

hypoth. | *a*3; *b*3: *a*; *b*, + *a*; *b*, + *a*; *b*.

hypoth. | *c*3; *d*3: *c*; *d*, + *c*; *d*, + *c*; *d*:

p. p. | *a*3; *b*3, + *c*3; *d*3: *a*; *b*, + *c*; *d*, + *a*; *b*, + *c*; *d*, + *a*; *b*, + *c*; *d*.

hypoth. | Multitudo rationum *a*; *b*, & *a*; *b*, & *a*; *b*: æqualis est multitudini *c*; *d*, & *c*; *d*, & *c*; *d*: necnon multitudini *a*; *b*, + *c*; *d*, & *a*; *b*, + *c*; *d*, & *a*; *b*, + *c*; *d*.

def. 4. h. | *a*3; *b*3, + *c*3; *d*3: æquemultiplicata *a*; *b*, + *c*; *d*.

| Quod &c.

Quare &c.

Theor. 2. Prop. 2.

SI prima ratio, secundæ, fuerit æquemultiplicata, atque prima quantitas, est multiplex secundæ; fuerit autem & tertia ratio, secundæ, æquemultiplicata, atque tertia

quantitas, est multiplex secundæ: erit composita ratio ex prima, & tertia, secundæ, æquemultiplicata, atque aggregata quantitas ex prima, & tertia, est multiplex secundæ.

Hypoth.

$a2; b2$: multiplicata $a; b$. sicut $2c; c$, multiplex.
$a3; b3$: multiplicata $a; b$. sicut $3c; c$, multiplex.
Dico $a2; b2, + a3; b3$: multiplicatam $a; b$. sicut $2c + 3c; c$, multiplicem.

Demonstr.

hypoth. | $a2; b2$: $a; b, + a; b$. sicut $2c$: $c + c$. Et quot sunt rationes $a; b$, & $a; b$: tot sunt c, & c, quantitates.

hypoth. | $a3; b3$: $a; b, + a; b, + a; b$ sicut $3c$: $c + c + c$. Et quot sunt rationes $a; b$, & $a; b$, & $a; b$: tot sunt quantitates, c, & c, & c.

p. p. | $a2; b2, + a3; b3$: $a; b, + a; b, + a; b, + a; b, + a; b$. sicut $2c + 3c$: $c + c + c + c + c$. & quot sunt rationes $a; b$, & $a; b$, & $a; b$; & $a; b$, & $a; b$: tot sunt quantitates, c, & c, & c, & c, & c.

def.4.h. | $a2; b2, + a3; b3$: multiplicata $a; b$: sicut $2c + 3c; c$, multiplex. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 3. Prop. 3.

SI prima ratio, secundæ, æquèfuerit multiplicata, atque tertia, quartæ; fuerit autem & quinta; secundæ,

dæ,

dæ, æquemultiplicata, atque sexta, quartæ: erit & composita ex prima, & quinta, secundæ æquemultiplicata, atq; composita ex tertia, & sexta, quartæ.

Hypoth.

$a2; b2$: multiplicata $a; b$. sicut $c2; d2$: multiplicata $c; d$.

$a3; b3$: multiplicata $a; b$. sicut $c3; d3$: multiplicata $c; d$.

Dico $a2; b2, + a3; b3$: multiplicatam $a; b$. sicut $c2; d2, + c3; d3$: multiplicatam $c; d$.

Demonstr.

hypoth. $a2; b2: a; b, + a; b$. sicut $c2; d2: c; d, + c; d$. Et quot sunt $a; b$, & $a; b$: tot sunt $c; d$, & $c; d$.

hypoth. $a3; b3: a; b, + a; b, + a; b$. sicut $c3; d3: c; d, + c; d, + c; d$. Et quot sunt $a; b$, & $a; b$, & $a; b$: tot sunt $c; d$, & $c; d$, & $c; d$.

p. p. $a2; b2, + a3; b3: a; b, + a; b, + a; b, + a; b, + a; b$. sicut $c2; d2, + c3; d3: c; d, + c; d, + c; d, + c; d, + c; d$. Et quot sunt $a; b$, & $a; b$, & $a; b$, & $a; b$, & $a; b$: tot sunt $c; d$, & $c; d$, & $c; d$, & $c; d$, & $c; d$.

def.4.h. $a2; b2, + a3; b3$: multiplicata $a; b$. sicut $c2; d2, + c3; d3$: multiplicata $c; d$. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 4. Prop. 4.

SI prima ratio, secundæ æquemultiplicata fuerit, atque prima quantitas, secundæ; sumantur autem ratio, & quantitas; & sumpta ratio, sit ęquemultiplicata primæ rationis, atque sumpta quantitas, multiplex primæ quantitatis: erit & ex æquo, sumpta ratio, ęquemultiplicata secundæ rationis, atque sumpta quantitas, secundæ quantitatis.

Hypoth.

$a3$; $b3$: multiplicata a; b. sicut $3c$; c, multiplex.

$a6$; $b6$: multiplicata $a3$; $b3$. sicut $6c$; $3c$, multiplex.

Dico $a6$; $b6$: multiplicatam a; b. sicut $6c$; c, multiplicem.

Demonstr.

hypoth. | $a3$; $b3$: multiplicata a; b. sicut $3c$; c, multiplex:

2. b. | $a3$; $b3$,$+a3$, $b3$: multiplicata a; b. sicut $3c+3c$; c, multiplex.

hypoth. | $a6$; $b6$: $a3$; $b3$,$+a3$; $b3$. sicut $6c$: $3c+3c$. Et quot sunt, $a3$; $b3$, & $a3$; $b3$: tot sunt $3c$, & $3c$.

$a6$; $b6$: multiplicata a; b. sicut $6c$; c, multiplex. Quod &c. Quare &c.

Theor. 5. Prop. 5.

SI prima ratio, secundæ æquemultiplicata fuerit, atque tertia, quartæ; sumantur autem æquemultiplicatæ rationes,

tiones, primæ, & tertiæ: erit & ex æquo, sumptarum vtraque, vtriusque, æquemultiplicata; altera quidem secundę, altera autem quartæ.

Hypoth.

$a3$; $b3$: multiplicata a; b. sicut $c3$; $d3$: multiplicata c; d.

$a6$; $b6$: multiplicata $a3$; $b3$. sicut $c6$; $d6$: multiplicata $c3$; $d3$.

Dico $a6$; $b6$: multiplicatam a; b. sicut $c6$; $d6$: multiplicatam c; d.

Demonstr.

hypoth. | $a3$; $b3$: multiplicata a; b. sicut $c3$; $d3$: multiplicata c; d.

3. *b.* | $a3$; $b3$, $+a3$; $b3$: multiplicata a; b. sicut $c3$; $d3$, $+c3$; $d3$: multiplicata c; d.

hypoth. | $a6$; $b6$: $a3$; $b3$, $+a3$; $b3$. sicut $c6$; $d6$: $c3$; $d3$, $+c3$; $d3$. Et quot sunt $a3$; $b3$, & $a3$; $b3$: totidem sunt $c3$; $c3$, & $c3$; $d3$.

| $a6$; $b6$: multiplicata a; b. sicut $c6$; $d6$: multiplicata c; d. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 6. Propos. 6.

SI fuerint, in eadem ratione logarithmica, prima ratio, ad secundam, atque prima quantitas, ad secundam: etiam multiplicata primæ rationis, & æquemultiplex primæ quantitatis, ad multiplicatam, secundæ rationis, & æque-

æquemultiplicem ſecundæ quantitatis, in eadem erunt logarithmica ratione.

Hypoth.

Sint rationes *A*, & *B*; & quantitates *a*, & *b*: & ſit ratio *A*, ad rationem *B*, logarithmicè; ſicut quantitas *a*, ad quantitatem *b*. Sitque ratio 3*A*, multiplicata rationis *A*; ſicut quantitas 3*a*, multiplex quantitatis *a*: item ratio 4*B*, multiplicata rationis *B*; ſicut quantitas 4*b*, multiplex quantitatis *b*.

Dico rationem 3*A*, ad rationem 4*B*, eſſe logarithmicè ſicut quantitas 3*a*, ad quantitatem 4*b*.

Præpar.

Accipiatur ratio 6*A*, multiplicata rationis 3*A*; & quantitas 6*a*, æquemultiplex quantitatis 3*a*: item ratio 20*B*, multiplicata rationis 4*B*; & quantitas 20*b*, ęquemultiplex quantitatis 4*b*.

Demonſtr.

4. *b.* Ratio 6*A*, æquemultiplicata eſt rationis *A*; atque quantitas 6*a*, multiplex eſt quantitatis *a*. item ratio 20*B*, æquemultiplicata eſt rationis *B*; atque quantitas 20*b*, multiplex eſt quantitatis *b*. Sunt autem rationes *A* ad *B* logarithmicè, ſicut quantitates *a* ad *b*. Ergo ſi ratio 6*A*, eſt altior ratione 20*B*; etiam quantitas 6*a*, maior eſt quantitate 20*b*: ſi ęquealta; æqualis: ſi depreſſior; minor. Sed eſt ratio 6*A*, æquemultiplicata rationis 3*A*; atque quantitas 6*a*, multiplex

(Margin notes: *hypoth.*; *def. 8. b.*; *conſtr.*)

tiplex

tiplex quantitatis 3*a*: & ratio 20*B*, rationis 4*B*, æquemultiplicata eſt; atque quantitas 20*b*, quan-
def.8.h. titatis 4*b*. Ergo rationes 3*A*, ad 4*B*, ſunt logarithmicè; ſicut quantitates, 3*a*, ad 4*b*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 7. Prop. 7.

SI prima ratio, ad ſecundam, eamdem habuerit rationem logarithmicè, atque tertia, ad quartam: etiam æquemultiplicatæ rationes primæ, & tertiæ, ad æquemultiplicatas ſecundæ, & quartæ, iuxta quamuis multiplicationem, eamdem habebunt rationem, ſi prout inter ſe reſpondent, ita ſumptæ fuerint.

Hypoth.

Sunto rationes quatuor *A* ad *B*, & *C* ad *D*, logarithmicè proportionales: & ſunto ipſarum *A*, *C*, æquemultiplicatæ rationes 3*A*, 3*C*: necnon ipſarum *B*, *D*, æquemultiplicatæ, 4*B*; 4*D*.

Dico quatuor rationes 3*A* ad 4*B*, & 3*C* ad 4*D*, logarithmicè proportionales eſſe.

Præpar.

Sumantur ipſarum 3*A*, 3*C*, æquemultiplicatæ rationes 6*A*, 6*C*: & ipſarum 4*B*, 4*D*, æquemultiplicatæ, 20*B*, 20*D*.

Demonſt.

4. *h.* Rationes 6*A*, 6*C*, æquemultiplicatæ ſunt rationum, *A*, *C*: & 20*B*, 20*D*, æquemultiplicatæ

hypoth. sunt rationum *B*, *D*. suntque *A* ad *B*, logarithmicè proportionales, vt *C* ad *D*. Ergo si $6A$, altior est, quàm $20B$; etiam $6C$, altior est, quàm $20D$: si æquealta; æquealta: si depressior; depressior. Et sunt $6A$, $6C$, ipsarum $3A$, $3C$, æquemultiplicatæ; necnon $20B$, $20D$, ipsarum $4B$, $4D$, æquemultiplicatæ. Ergo $3A$ ad $4B$, & $3C$ ad $4D$, sunt logarithmicè proportionales. Quod &c.

def.12.h

hypoth.

def.12.h

Quare &c.

Theor. 8. *Prop.*

SI fuerint duæ rationes, singulæ, ex binis compositæ, altiores, ex depressioribus, & quodammodo totæ, ex abscissa, & residua: fuerit autem vna tota ratio, ad alteram totam, æquemultiplicata; atque sua abscissa, ad alterius abscissam: erit & æquemultiplicata; atque sua residua, ad alterius residuam.

Hypoth.

Ratio $A+B$, ex rationibus *A*, & *B*, altior, ex depressioribus, componitur; item $C+D$ ratio, ex rationibus *C*, & *D*, componitur: & esto $A+B$, ad $C+D$, æquemultiplicata, atque *A* ad *C*.

Dico $A+B$ ad $C+D$, æquemultiplicatam etiam esse, atque *B* ad *D*.

Præpar.

Fiat ratio *G* ad *D*, æquemultiplicata, atque *A* ad *C*.

De-

Demonstr.

p. h. | $A+G$ ad $C+D$, æquemultiplicata eſt, atque A ad C.
hypoth. | $A+B$ ad $C+D$, ęquemultiplicata eſt, atque A ad C.
p. p. | $A+B$ ratio, eadem eſt, quæ $A+G$.
Et compoſita vtrimque conuerſa rationis A,
p. p. | B ratio, eadem eſt, quæ G.
p. p. | B ad D, æquemultiplicata eſt, atque A ad C.
p. h. | $A+B$ ad $C+D$, æquemultiplicata eſt, atque B ad D. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 9. Prop. 9.

SI ratio, & quantitas, cuiuſdam rationis, & cuiuſdam quantitatis, æquè ſint multiplicata, & multiplex; & abſciſſa ratio, & abſciſſa quantitas, eiuſdem rationis, & eiuſdem quantitatis, æquè ſint multiplicata, & multiplex: reſidua ratio, & reſidua quantitas, eiuſdem rationis, & eiuſdem quantitatis, vel ſunt æquealta, & æqualis; vel æquè ſunt multiplicata, & multiplex.

Hypoth.

Ratio $A+B$, rationis C, æquemultiplicata eſt, atque quantitas $a+b$, multiplex quantitatis c; & ratio A, rationis C, æquemultiplicata eſt, atque quantitas a, multiplex quantitatis c.

Dico quòd, vel B æquealta eſt ipſi C; ſicut b, æqualis ipſi c: vel B æquemultiplicata eſt ipſius C; ſicut b

multiplex ipſius *c*.

Demonſtr.

hypoth. Numerus rationum *C*, ex quibus *A+B* componitur, idem eſt qui quantitatum *c*, ex quibus *a+b* colligitur: item numerus rationum *C* ex quibus *A* componitur, idem eſt qui quantitatum *c*, ex quibus *a* componitur. Quorum numerorum, vel eſt differentia vnitas, vel numerus.

Si vnitas eſt differentia; vna eſt ratio *C*, quacum compoſita ratio *A*, facit rationem *A+B*; & vna eſt quantitas *c*, quacum compoſita quantitas *a*, facit quantitatem *a+b*. Sed & *B* ratio eſt, quacum compoſita *A*, facit rationem *A+B*; & *b* quantitas eſt, quacum compoſita *a*, facit quantitatem *a+b*. Ergo *B* ęquealta eſt ipſi *C*; atque *b* æqualis ipſi *c*. *hypoth.*

Si verò numerus eſt differentia, tot ſunt rationes *C*, quibuſcum compoſita ratio *A*, facit rationem *A+B*; totidemque ſunt quantitates *c*, quibus cum compoſita quantitas *a*, facit quantitatem *a+b*. Sed *B* ratio eſt, quacum compoſita ratio facit rationem *A+B*; & *b* quantitas, quacum compoſita quantitas *a*, facit quantitatem *a+b*. Ergo quot ex *C* rationibus componitur *B*; tot ex *c*, quantitatibus componitur *b*. Ergo *B* ad *C*, æquemultiplicata eſt, atque *b* ad *c*, multiplex. Ergo *B* ad *C*, vel æquealta eſt: atque *b* ad *hypoth.* *def.4.b.*

b ad *c*, æqualis: vel æquemultiplicata eſt; atque multiplex. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 10. *Prop.* 10.

SI duæ rationes, duarum rationum, ſint æquemultiplicatæ; & abſciſſæ quædam, ſint earumdem æquemultiplicatæ: & reſiduæ, eiſdem, aut æquealtæ ſunt, aut æquemultiplicatæ.

Hypoth.

Ratio $A+B$, rationis C, æquemultiplicata eſt, atque ratio $D+E$, rationis F; & ratio A, rationis C, æquemultiplicata eſt, atque ratio D, rationis F.

Dico rationem B rationis C, æquealtam eſſe, atque ratio E rationis F; vel æquemultiplicatam.

Demonſtr.

hypoth. Quot ex C rationibus, ratio $A+B$ componitur, idem numerus eſt, indicans etiam, quot ex F rationibus, componitur ratio $D+E$. & quot ex C rationibus, ratio A componitur, idem numerus eſt, indicans etiam, quot ex F rationibus, ratio D componitur: quorum numerorum vel eſt differentia vnitas, vel numerus.

Si vnitas eſt differentia: vna eſt ratio C, quacum compoſita ratio A, facit rationem $A+B$; & vna eſt ratio F, quacum compoſita ratio D, facit rationem $D+E$.

hypoth. Sed & B cum A, & E cum D, fa-

D, faciunt rationes compositas $A+B$, & $D+E$. Ergo B ad C eadem est, & æquealta, atque ratio E ad F. si enim binæ non essent æquealtę; esset vna binarum, æqualitati propior, quàm altera, & non essent eędem inter se.

Si verò numerus est differentia: totidem sunt rationes C, quibuscum ratio A composita, facit $A+B$ rationem; quot etiam rationes F, quibuscum ratio D composita, facit $D+E$ rationem. Sed & B cum A, & E cum D, faciunt rationes compositas $A+B$, & $D+F$. Ergo B ad C ęquemultiplicata est, atque E ad F. Ergo B ad C, vel æquęalta est, vel æquemultiplicata, atque E ad F. Quod &c.

hypoth. *def.4.h.*

Quare &c.

Theor. 11. *Propos.* 11.

ÆQuealtæ, ad eamdem, eamdem habent rationem logarithmicam: & eadem, ad ęquealtas.

Hypoth.

Rationes A, & B sunt æquealtæ.

Dico A rationem, ad C, esse logarithmicè, vt B, ad C. Et C rationem, ad A, esse logarithmicè, vt C, ad B.

Præpar.

Sumantur ipsarum A, B, æquemultiplicatæ rationes D, E: & sumatur F ratio multiplicata, rationis C.

De-

Demonstr.

def.5.b. Quoniam *A* ad *C*, ratio est logarithmica; cuius inæqualitatis est ratio *C*, eiusdē est & *A*: item quoniam *B* ad *C*, ratio est logarithmica; cuius inæqualitatis est *C*, eiusdem est & *B*: ergo *A*, *B* rationes, eiusdem inter se sunt inæqualitatis: & sunt *A*, *B* æquealtæ: ergo sunt eædem inter se. si enim non essent eædem inter se, esset vna remotior ab ęqualitate, quàm altera, & non essent ęquealtæ. Sumptæ autem sunt *D*, *E* æquemultiplicatæ rationum *A*, *B* earumdem inter se: ergo p. p. etiam *D*, *E*, sunt eædem inter se rationes, & æquealtę. Ergo si *D* est altior, quàm *F*, etiam *E* altior est, quàm *F*: si æquealta; æquealta: si dedef.12.b pressior; depressior. Ergo ratio *A* ad *C*, est logarithmicè, sicut ratio *B* ad *C*. Quod &c. Necnon ratio *C* ad *A*, est logarithmicè, sicut *C* ad *B*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 12. Prop. 12.

Rationum non æquealtarum, altior ad eandem, maior est logarithmicè, quàm depressior: & eadem ad depressiorem, maior est logarithmicè, quàm ad altiorem.

Hypoth.

Esto ratio *A+B* altior, quàm *B*.

Dico *A+B*, ad *C*, maiorem esse logarithmicè, quàm *B*, ad *C*.

Et

Et C, ad B, maiorem logarithmicè, quàm C, ad A+B.

Præpar. & Demonstr.

Sumatur A ratio, quæ cum B, componit rationem A+B: & duarum rationum A, B, sumatur altera non altior, quæ sit A: & rationis A, totuplicata D, quoties oportet, vt fiat altior, quàm C; & rationis B, æquemultiplicata sumatur E. *def.7.h.*

Quoniam A, non est altior, quàm B; & D, E sunt æquemultiplicatæ ipsarum A, B: oportet D non esse altiorem, quàm E. si enim esset altior; ex iisdem, vel ex propioribus æqualitati, vtrisq; maioris, vel vtrisque minoris inęqualitatis rationibus, esset remotior ab ęqualitate ratio composita. ergo D, est altior, quàm C: ergo E, est altior, quàm C. *cõtra p. p.&p.3.*

Sumatur ipsius C, bis, ter, quater, vel deinceps, quoties oportet, multiplicata ratio F, vt fiat primò altior quàm E. Quare ratio F, non est altior, quàm ratio E+C: est autem D altior, quàm C: ergo D+E altior est, quàm E+C. alioquin ex remotioribus ab æqualitate rationibus, vtrisque maioris, vel vtrisque minoris inæqualitatis, non altior fieret composita ratio, ideoque non remotior ab æqualitate, *contra p.p. & p.* 3. Sed F. non est altior, quàm E+C: ergo D+E, est altior, quàm F: & est E depressior, quàm F: & sunt D, E rationes æquemultiplicatæ, rationum A, B: & D+E ratio, est ęquemultiplicata, rationis A+B: *def.7.h.* *p. h.*

Ergo

def.14.b Ergo $A+B$ ratio, ad rationem C, maior est logarithmicè, quàm B ad C. Quod &c. Et ratio
def.14.b C, ad rationem B, maior est logarithmicè, quàm C, ad $A+B$. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 13. *Prop.* 13.

QVæ, ad eamdem, eamdem habent rationem logarithmicam; inter se sunt eædem rationes logarithmicæ: & ad quas eadem, eamdem habet logarithmicam; inter se sunt eædem rationes logarithmicæ.

Hypoth. 1.

Ratio A ad rationem C, esto logarithmicè, sicut ratio B ad rationem C.

Dico rationes A, B, esse easdem inter se.

Demonstr.

Quoniam A ad C, & B ad C, sunt rationes
def.5.b. logarithmicæ; cuius inæqualitatis est C ratio, maioris, vel minoris; eiusdem sunt A, & B rationes: quæ si non eædem essent inter se, non essent æquealtæ: & assignaretur earum altera altior. Assignetur
12. b. A, si fieri potest, altior, quàm B: ergo A ad C, maior est logarithmicè, quàm B. *contra hypoth.* Ergo rationes A, B, sunt eædem inter se. Quod &c.

Hypoth. 2.

Ratio C, ad rationem A, esto logarithmicè, sicut ratio C, ad rationem B.

Dico rationes *A*, *B*, esse easdem inter se.

Demonstr.

12. *b.* Assignetur *A*, si fieri potest depressior, quàm *B*: Ergo *C* ad *A*, maior est logarithmicè, quàm ad *B*: *contra hypoth.* Ergo *A* non est depressior, quàm *B*: item demonstrabitur, quod neque *B*
11. *b.* est depressior, quàm *A*: sunt ergo *A*, *B* rationes æquealtæ, & eædem inter se. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 14. *Prop.* 14.

RAtionum, ad eamdem rationem, quæ maior est logarithmicè, illa est altior: & ad quàm, eadem maior est logarithmicè, illa est depressior.

Hypoth. 1.

Ratio *A*, maior est logarithmicè ad *C*, quàm *B*.

Dico *A*, altiorem esse, quàm *B*.

Demonstr.

Esto *A* non altior, quàm *B*, si fieri potest: erit itaque vel æquealta, vel depressior. Sunto *A*, *B*
11. *b.* æquealtæ, si fieri potest. Ergo *A* ad *C*, est logarithmicè, sicut *B*. *contra hypoth.* Esto *A* depres-
12. *b.* sior, quàm *B*, si fieri potest. Ergo *B* ad *C*, minor est logarithmicè, quàm *A*. *contra hypoth.* Ergo *A*, non est æquealta, neque depressior, quàm *B*: ergo est altior. Quod &c.

Hy-

Hypoth. 2.

Ratio *C* ad *A*, maior est logarithmicè, quàm ad *B*. Dico *A*, depressiorem esse, quàm *B*.

Demonstr.

Esto *A* non depressior, quàm *B*, si fieri potest: erit itaque vel æquealta, vel altior. Sunto *A*, *B*
11. *h.* æquealtæ, si fieri potest. Ergo *C* ad *A*, est logarithmicè, sicut ad *B*. *contra hypoth.* Esto *A* altior,
12. *h.* quàm *B*, si fieri potest. Ergo *C* ad *A*, minor est logarithmicè, quàm ad *B*. *contra hypoth.* Ergo *A* non est æquealta, neque altior, quàm *B*: ergo est depressior. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 15. *Prop.* 15.

QVæ eidem sunt eædem rationes, inter se sunt eædem, tùm logarithmicè, tùm absolutè.

Hypoth. 1.

Rationes *A* ad *B*, logarithmicè sunt, vt quantitates *c* ad *d*: & *c* ad *d* quantitates, vt quantitates *e* ad *f*.

Dico rationes *A* ad *B*, logarithmicè esse, sicut quantitates *e* ad *f*.

Hypoth. 2.

Rationes *A* ad *B*, logarithmicè sunt, vt quantitates *c* ad *d*: & *c* ad *d* quantitates, sunt sicut logarithmicè rationes *E* ad *F*.

Dico rationes *A* ad *B*, esse logarithmicè, sicut rationes *E* ad *F*.

 Hy-

Hypoth. 3.

Quantitates *a* ad *b*, ſunt inter ſe, ſicut logarithmicè, rationes *C* ad *D*: & rationes *C* ad *D*, logarithmicè ſunt, ſicut quantitates *e* ad *f*.

Dico *a* ad *b*, eſſe vt *e* ad *f*.

Hypoth. 4.

Quantitates *a* ad *b*, ſunt inter ſe, ſicut logarithmicè, rationes *C* ad *D*: & rationes *C* ad *D*, logarithmicè ſunt, vt rationes *E* ad *F*.

Dico quantitates *a* ad *b* eſſe, ſicut logarithmicè, rationes *E* ad *F*.

Hypoth. 5.

Rationes *A* ad *B*, logarithmicè ſunt, vt rationes *C* ad *D*:. & rationes *C* ad *D*, logarithmicè, vt rationes *E* ad *F*.

Dico rationes *A* ad *B* logarithmicè eſſe, ſicut rationes *E* ad *F*.

Præpar. comm.

Sumantur ipſarum rationum, vel quantitatum *A*, *C*, *E*, æquemultiplicatæ, & æquemultiplices, 3*A*, 3*C*, 3*E*: necnon ipſarum *B*, *D*, *F*, æquemultiplicatæ, & æquemultiplices, 4*B*, 4*D*, 4*F*.

Demonſtr. comm.

def. 8 vel 12. h. vel 65. Si 3*A*, altior eſt, vel maior, quàm 4*B*; etiam 3*C*, altior eſt, vel maior, quàm 4*D*. Quod ſi 3*C*, altior eſt, vel maior, quàm 4*D*; etiam 3*E* altior eſt, vel maior, quàm 4*F*. Ergo ſi 3*A* altior eſt,

vel

vel maior, quàm $4B$; etiam $3E$ altior eſt, vel maior, quàm $4F$. Item ſi æquealta, vel æqualis; etiam æquealta, vel æqualis: ſi depreſſior, vel minor; etiam depreſſior, vel minor. Ergo proportionales ſunt ſiue rationes, ſiue quantitates, vel mixtim A ad B, ſicut E ad F: tùm logarithmiſiè, ſiquæ ſunt rationes; tùm abſolutè, ſi nullæ ſunt rationes, ſed ſolùm quantitates. Quod &c.

def 8 vel 12. h. vel 6. 5.

Quare &c.

Theor. 16. Prop. 16.

SI ſint quotcunque rationes logarithmicè proportionales, quemadmodum ſe habuerit logarithmicè vna antecedentium ad vnam conſequentium; ita logarithmicè ſe habebit compoſita ex omnibus antecedentibus, ad compoſitam ex omnibus conſequentibus.

Hypoth.

Rationes A ad B, & C ad D, & E ad F, ſunt logarithmicè proportionales. Ex rationibus A, C, & E compoſita eſt $A+C+E$: & ex rationibus B, D, & F compoſita eſt $B+D+F$.

Dico $A+C+E$ ad $B+D+F$, & A ad B, eſſe logarithmicè proportionales.

Præpar.

Rationum A, C, E ſumantur æquemultiplicatæ rationes: $3A$, $3C$, $3E$: ex quibus compoſita ratio $3A+3C+3E$. Item rationum B, D, F, ſumantur æquemultiplicatæ

catæ rationes $4B$, $4D$, $4F$: ex quibus composita ratio $4B+4D+4F$.

Demonstr.

def.12.b Quoniam A ad B, & C ad D, sunt logarithmicè proportionales: si $3A$ altior est, quàm $4B$; etiam $3C$ altior est, quàm $4D$: si æquealta; æquealta: si depressior; depressior. Item quoniam C ad D, & E ad F, sunt logarithmicè proportionales: si $3C$ altior est, quàm $4D$; etiam $3E$, altior est, quàm $4F$: si æquealta; æquealta: si depressior; depressior. Ergo si $3A$, altior est, quàm $4B$: etiam $3A+3C+3E$ altior est quàm $4B+4D+4F$: si æquealta; æquealta: si depressior; depressior. p. b. Et est $3A+3C+3E$ ad $A+C+E$, totuplicata, quotuplicata est $3A$ ad A: item $4B+4D+4F$, ad $B+D+F$. totuplicata est, quotuplicata $4B$ ad B. def.12.b Ergo $A+C+E$ ad $B+D+F$, & A ad B, sunt logarithmicè proportionales. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 17. Propos. 17.

SI sex vel rationum, vel & quantitatum mixtim, prima ad secundam eamdem habuerit rationem, quàm tertia ad quartam: tertia verò ad quartam maiorem habuerit, quàm quinta ad sextam: etiam prima ad secundam, maiorem habebit, quàm quinta ad sextam.

Hy-

Hypoth. 1.

Quantitates *a* ad *b*, & *c* ad *d*, sunt proportionales: sed quantitatum *c* ad *d* ratio, maior est, quàm logarithmica, *E* ad *F* rationum.

Dico quantitatum *a* ad *b* rationem maiorem esse, quàm logarithmica *E* ad *F* rationum.

Hypoth. 2.

Quantitates *a* ad *b*, & rationes *C* ad *D*, sunt logarithmicè proportionales: sed rationum logarithmica ratio *C* ad *D*, maior est quàm quantitatum *e* ad *f*.

Dico *a* ad *b* maiorem esse, quàm *e* ad *f*.

Hypoth. 3.

Rationes *A* ad *B*, & quantitates *c* ad *d*, sunt logarithmicè proportionales: sed quantitatum ratio *c* ad *d*, maior est, quàm *e* ad *f*.

Dico rationum logarithmicam *A* ad *B*, maiorem esse, quàm *e* ad *f*.

Hypoth. 4.

Quantitates *a* ad *b*, & rationes *C* ad *D*, sunt logarithmicè proportionales: sed rationum *C* ad *D* logarithmicè maior est, quàm *E* ad *F*.

Dico quantitatum *a* ad *b* rationem maiorem esse, quàm rationum logarithmica *E* ad *F*.

Hypoth. 5.

Rationes *A* ad *B*, & quantitates *c* ad *d* sunt proportionales logarithmicè: sed quantitatum *c* ad *d*, maior est rato, quàm logarithmica rationum *E* ad *F*.

Dico

Dico *A* ad *B*, maiorem esse logarithmicè, quàm *E* ad *F*.

Hypoth.6.

Rationes *A* ad *B*, & *C* ad *D* sunt proportionales: sed *C* ad *D* ratio, logarithmicè maior est, quàm *e* ad *f*.

Dico rationum *A* ad *B* logarithmicam rationem, maiorem esse, quàm quantitatum *e* ad *f*.

Hypoth.7.

Rationes *A* ad *B*, & *C* ad *D*, sunt proportionales: sed *C* ad *D* rationum ratio logarithmicè maior est quàm *E* ad *F* ratio logarithmica.

Dico *A* ad *B* logarithmicè maiorem esse, quàm *E* ad *F*.

Præpar. comm.

Sumantur æquemultiplicatę rationum rationes, & ęquemultiplices quantitatum quantitates; antecedentium *A*, *C*, *E*, antecedentes 3*A*, 3*C*, 3*E*; & consequentium *B*, *D*, *F* consequentes 4*B*, 4*D*, 4*F*: secundum eas multiplicationes; quibus 3*C*, altior quidem est, vel maior, quàm 4*D*; sed 3*E*, non altior, vel non maior est, quàm 4*F*.

Demonstr. commun.

def 8 vel 12.h. vel 6. 5. def. 10. vel 11. vel 14.h vel 8.5. Quoniam 3*C* est altior, vel maior, quàm 4*D*: ergo etiam 3*A* est altior, vel maior, quàm 4*B*: & interim 3*E* non altior est, vel non maior, quàm 4*F*. ergo *A* ad *B*, maior est, quàm *C* ad *D*, siuè logarithmicè, siuè absolutè. Quod &c.

Quare &c.

Theo-

Theor. 18. *Prop.* 18.

Rationum logarithmicè proportionalium, si prima fuerit altior, quàm tertia: erit & secunda altior, quàm quarta: si æquealta; æquealta: si depressior; depressior.

Hypoth. commun.

Rationes *A* ad *B*, & *C* ad *D*, sunt logarithmicè proportionales.

Hypoth. 1.

Altior est ratio *A*, ratione *C*.

Dico, quòd altior est ratio *B*, ratione *D*.

Demonstr.

Esto, si fieri potest, non altior *B* ratio, quàm *D*: ergo vel est æquealta, vel depressior. Esto si
12. *h.* fieri potest æquealta. Ergo *A* ad *B*, maior est
11. *h.* logarithmicè, quàm *C* ad *B*: sed *C* ad *B* eadem
17. *h.* est logarithmicè, quæ *C* ad *D*. Ergo *A* ad *B* maior est logarithmicè quàm *C* ad *D*, *contra hypoth.* Non sunt ergo *B*, *D* rationes æquealtæ.

12. *h.* Esto, si fieri potest, *B* depressior, quàm *D*. Ergo *C* ad *B*, maior est logarithmicè, quàm *C* ad
hypoth. *D*. Sed *A* ad *B*, est logarithmicè, vt *C* ad *D*. Er-
17. *h.* go *C* ad *B*, maior est logarithmicè, quàm *A* ad
14. *h.* *B*. Ergo *C* altior est, quàm *A*. *contra hypoth.* Non est ergo *B* depressior, quàm *D*; neque æquealta: ergo *B* est altior, quàm *D*. Quod &c.

Hypoth. 2.

Æquealtæ ſunt rationes *A*, *C*.

Dico quòd & æquealtæ ſunt rationes *B*, *D*.

Demonſt.

Sunto *B*, *D* non æquealtæ, ſi fieri poteſt: &
12. *h.* eſto *B* altior, quàm *D*. Ergo *C* ad *D*, maior
hypoth. eſt logarithmicè, quàm *C* ad *B*. Sed *A* ad *B*, ea-
17. *h.* dem eſt logarithmicè, quæ *C* ad *D*. Ergo *A* ad
14. *h.* *B*, maior eſt logarithmicè, quàm *C* ad *B*. Ergo
A, altior eſt, quàm *C*. *contra hypoth.* Sunt ergo
B, *D* æquealtæ. Quod &c.

Hypoth.

Depreſſior eſt *A*, quàm *C*.

Dico quòd & *B* depreſſior eſt, quàm *D*.

Demonſtr.

hypoth. Altior eſt *C* quàm *A*: & eſt *C* ad *D* logari-
ſup. thmicè, vt *A* ad *B*: ergo altior eſt *D*, quàm *B*:
def. 2. *h.* ergo depreſſior eſt *B*, quàm *D*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 19. *Prop.* 19.

SVbmultiplicatæ rationes, cum pariter multiplicatis, in eadem ſunt ratione logarithmica, ſi prout ſibi mutuò reſpondent, ita ſumantur.

Hypoth.

Rationũ *A*, *B*, ſunt æquemultiplicatę rationes 3 *A*, 3 *B*.

Dico *A* ad *B*, atque 3 *A* ad 3 *B*, eſſe logarithmicè proportionales. *De-*

Demonstr.

Rationes *A* ad *B*, & *A* ad B, & *A* ad B, quotcunque oportet, acceptæ, sunt proportionales: ergo ex antecedentibus composita 3*A*, ad ex consequentibus compositam 3B, est logarithmicè, vt *A* ad B. Quod &c.

16. *h.*

Quare &c.

Theor. 20. *Prop.* 20.

RAtiones logarithmicè proportionales, permutando, sunt logarithmicè proportionales.

Hypoth.

Sint rationes logarithmicè proportionales, *A* ad B, vt *C* ad *D*.

Dico permutando, esse logarithmicè proportionales, *A* ad *C*, vt B ad *D*.

Præpar.

Rationum *A*, *B*, sumantur æquemultiplicatæ 3*A*, 3B: & rationum *C*, *D*, æquemultiplicatæ 2*C*, 2*D*.

Demonstr.

19. *h.* Rationes 3*A* ad 3*B*, & *A* ad *B*, sunt lo-
hypoth. garithmicè proportionales. item *A* ad *B*, & *C*
19. *h.* ad *D*. item *C* ad *D*, & 2*C* ad 2*D*. Ergo
15. *h.* 3*A* ad 3*B*, & 2*C* ad 2*D* sunt logarithmicè
18. *h.* proportionales. Ergo si 3*A*, est altior, quàm 2*C*; etiam 3*B*, est altior, quàm 2*D*: si æque-
def. 12. *h* alta; æquealta: si depressior; depressior. Ergo *A*

 ad *C*,

ad *C*, & *B* ad *D*, ſunt logarithmicè proportionales. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 21. *Prop.* 21.

RAtiones inter ſe, vel & cum quantitatibus, logarithmicè proportionales; diuidendo, ſunt logarithmicè proportionales.

Hypoth. 1.

Rationes *A+B* ad *B*, & *C+D* ad *D*, ſunt logarithmicè proportionales.

Dico diuidendo rationes *A* ad *B*, & *C* ad *D*, eſſe logarithmicè proportionales.

Præpar.

Sumantur ipſarum *A*, *B*, *C*, *D*, æquemultiplicatæ 3*A*, 3*B*, 3*C*, 3*D*: necnon ipſarum *C*, *D*, aliæ quælibet æquemultiplicatæ 4*C*, 4*D*.

Demonſtr.

Rationes 3*A*, 3*B*, æquemultiplicatæ ſunt rationum *A*, *B*: Ergo ratio 3*A*+3*B* totuplicata eſt rationis *A+B*, quotuplicata eſt 3*A* ipſius *A*: necnon 3*C*, & 3*D* ipſarum *C*, & *D*: necnon ratio 3*C*+3*D* rationis *C+D*. (*p. h.*; *conſtr.*; *p. h.*)

Rationes quoque 3*C*, 3*D*, rationum *C*, *D*; & rationes 4*C*, 4*D*, earumdem *C*, *D* rationum ſunt æquemultiplicatæ: ergo etiam 7*C*, 7*D*, earumdem *C*, *D* rationum ſunt æquemultiplicatæ. (*conſtr.*; 3. *h.*)

Et

hypoth. Et quoniam rationes $A+B$ ad B, & $C+D$ *def.12.b* ad D, sunt logarithmicè proportionales: si $3A+3B$, altior est, quàm $7B$; etiam $3C+3D$, altior est, quàm $7D$: si æquealta; ęquealta: si depressior; depressior.

Sed si $3A$ altior est, quàm $4B$; adcomposita communi ratione $3B$; etiam $3A+3B$ altior est, *4. 3.* quàm $7B$. nam eiusdem maioris, vel eiusdem minoris inæqualitatis, ex remotioribus rationibus ab æqualitate, composita ratio, est remotior; & ex propioribus, propior. & ostensum est, quòd si $3A+3B$, altior est quàm $7B$; etiam $3C+3D$, altior est, quàm $7D$: & seposita communi ratio- *4. 3.* ne $3D$; altior est $3C$, quàm $4D$. nam si $3C$, non esset altior, quàm $4D$: composita, $3D$; fieret ratio $3C+3D$, non altior, quàm $7D$. *contra superiùs probata*.

Ergo si $3A$ altior est, quàm 4B, etiam $3C$ altior est, quàm $4D$: similiter ostendetur, si ęque- *def.12.b* alta; æquealta: si depressior; depressior. Ergo A ad B, est logarithmicè, vt C ad D. Quod &c.

Hypoth.2.

Rationes $A+B$ ad B, & quantitates $a+b$ ad b, sunt logarithmicè proportionales.

Dico diuidendo, rationes A ad B, & quantitates a ad b esse logarithmicè proportionales.

Præ-

Præpar.

Rationum A, B, & quantitatum a, b, ſumantur ęquemultiplicatę rationes $3A$, $3B$, & æquemultiplices quantitates $3a$, $3b$. item rationis B, & quantitatis b, multiplicata ratio $4B$, & æquemultiplex quantitas $4b$.

Demonſtr.

p. h. Ratio $3A+3B$, totuplicata eſt rationis $A+B$,
conſtr. quotuplicata eſt $3A$, ipſius A; & quantitas $3a$,
p. 5. quantitatis a; & quantitas $3b$, quantitatis b; & quantitas $3a+3b$, quantitatis $a+b$.

conſtr. Quantitates quoque $3a$, $3b$, quantitatum a, b; & quantitates $4a$, $4b$, earumdem a, b, ſunt
2. 5. æquemultiplices: ergo $7a$, $7b$, earumdem a, b, ſunt æquemultiplices.

hypoth. Et quoniam rationes $A+B$ ad B, & quantitates $a+b$ ad b, ſunt logarithmicè proportiona-
def 8. h. les: ſi $3A+3B$, altior eſt, quàm $7B$; etiam $3a+3b$, maior eſt, quàm $7b$: ſi æquealta; æqualis: ſi depreſſior; minor.

ſup. Sed ſi $3A$, altior eſt, quàm $4B$; etiam $3A+3B$, altior eſt, quàm $7B$: & ſi $3a+3b$, maior eſt, quàm $7b$; etiam, dempta communi $3b$, relinquitur $3a$, maior quàm $4b$. Ergo ſi $3A$, altior eſt, quàm $4B$; etiam $3a$, maior eſt, quàm $4b$: & ſimiliter oſtendetur, ſi æquealta; æquali: ſi de-
def. 8. h. dreſſior; minor. Ergo rationes A ad B, & quantitates a ad b, ſunt logarithmicè proportionales. Quod &c. Quare &c.

Theor. 22. Prop. 22.

RAtiones inter se, vel & cum quantitatibus, logarithmicè proportionales, componendo, sunt logarithmicè proportionales.

Hypoth. 1.

Rationes *A* ad *B*, & *C* ad *D*, sunt logarithmicè proportionales.

Dico componendo, rationes *A+B* ad *B*, & *C+D* ad *D*, esse logarithmicè proportionales.

Præpar.

Assumatur *E* ratio, ad quàm *C+D* sit logarithmicè, sicut *A+B* ad B.

Demonstr.

constr. Quoniam *A+*B ad B, & *C+D* ad *E*, sunt lo-
21. *hr* garithmicè proportionales: ergo diuidendo *A*
ad B, & *C+D—E* ad *E*, sunt logarithmicè
hypoth. proportionales. Sed *A* ad B, & *C* ad *D* sunt
15. *h.* logarithmicè proportionales. Ergo *C* ad *D*, &
C+D—E ad *E*, sunt logarithmicè proportionales. Ergo *D*, æquealta est, ideoque eadem, atque *E*.

18. *h.* Nam si *D*, esset altior, quàm *E*: esset *C* altior,
4. 3. quàm *C+D—E*. Sed contra, esset *C+D* altior,
4. 3. quàm *C+E*: & *C+D—E*, altior, quàm *C*: quod
est contradictio. Rursum si *D*, esset depressior,
18. *h.* quàm *E*: esset *C*, depressior, quàm *C+D—E*.
4. 3. Sed contra, esset *C+D*, depressior; quàm *C+E*:

&

4. 3. & $C+D-E$, depreſſior, quàm C: quod eſt contradictio.

Ergo D eadem eſt, atque E. Ergo $C+D$ ad
18. h. D, & $C+D$ ad E, ſunt proportionales logarithmi-
conſtr. cè. Sed $A+B$ ad B eſt vt $C+D$ ad E: ergo A
15. h. $+B$ ad B, eſt vt $C+D$ ad D logarithmicè. Quod &c.

Hypoth. 2.

Rationes A ad B, & quantitates a ad b, ſunt logarithmicè proportionales.

Dico componendo, rationes $A+B$ ad B, & quantitates $a+b$ ad b, eſſe logarithmicè proportionales.

Præpar.

Aſſumatur e quantitas, ad quàm, $a+b$ eſt logarithmicè, ſicut ratio $A+B$, ad rationem B.

Demonſtr.

conſtr. Quoniam $A+B$ ad B, & $a+b$ ad c, ſunt logarithmicè proportionales: ergo diuidendo A ad B, & $a+b-c$ ad c, ſunt logarithmicè, propor-
hypoth. tionales. Sed A ad B, & a ad b, ſunt logari-
15. h. thmicè proportionales. Ergo a ad b, & $a+b-c$ ad c, ſunt proportionales. Ergo b, c, ſunt quantitates æquales.

14. 5. Nam ſi b, maior eſſet, quàm c: eſſet a, maior, quàm $a+b-c$. Sed contra, eſſet $a+b$, maior, quàm $a+c$: & $a+b-c$, maiõr, quàm a: quod
14. 5. eſt contradictio. Rurſum ſi b, minor eſſet, quàm c: eſſet

c: esset a, minor, quàm $a+b-c$. sed contra, esset $a+b$, minor, quàm $a+c$: & $a+b-c$, minor quàm a: quod est contradictio.

7. 5. Ergo b, c, sunt æquales. Ergo $a+b$, ad b,
constr. est vt $a+b$ ad c: Sed ratio $A+B$ ad rationem
15. h. B, est logarithmicè, vt quantitas $a+b$ ad quantitatem c: Ergo etiam est logarithmicè, vt $a+b$ ad b. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 23. Prop. 23.

SI quemadmodum tota ratio, ad totam, ita logarithmicè fuerit abscissa ratio, ad abscissam: erit & residua, ad residuam, sicut logarithmicè tota ad totam.

Hypoth.

Rationes $A+B$ ad $C+D$, & A ad C, sunt proportionales logarithmicè.

Dico etiam $A+B$ ad $C+D$, & B ad D, esse proportionales logarithmicè.

Demonstr.

hypoth. Rationes $A+B$ ad $C+D$, & A ad C, sunt
20. h. proportionales logarithmicè: ergo permutando,
21. h. sunt proportionales logarithmicè $A+B$ ad A, & $C+D$ ad C: ergo diuidendo, B ad A, &
20. h. D ad C, sunt proportionales: ergo permutando B ad D, & A ad C, sunt proportionales: Sed A ad C, & $A+B$ ad $C+D$ sunt proportio-

 nales.

15. *b.* nales. Ergo $A+B$ ad $C+D$, & B ad D, sunt logarithmicè proportionales. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 24. *Prop.* 24.

SI sint tres rationes, atque tres quantitates, quæ binæ, & in eadem ratione logarithmica sumantur: ex æquo autem prima ratio, quàm tertia, altior fuerit; erit & prima quantitas, quàm tertia, maior: quod si prima ratio, fuerit æquealta tertiæ; erit & prima quantitas, æqualis tertiæ: sin illa depressior; hęc quoque minor erit. Et è conuerso.

Hypoth. commun.

Tres rationes A, B, C, & tres quantitas a, b, c, binæ, & binæ, sunt logarithmicè proportionales: A ad B, vt a ad b; B ad C, vt b ad c.

Hypoth. 1.

Altior est ratio A, quàm C.

Dico, maiorem esse quantitatem a, quàm c.

Demonstr.

12. *b.* Ratio B ad C, maior est logarithmicè, quàm
hypoth. *def.* 8. *b.* B ad A: sed b ad c est logarithmicè vt B ad
17. *b.* C: & B ad A, est logarithmicè, vt b ad a: er-
10. 5. go b ad c, maior est, quàm b ad a. Ergo maior est a, quàm c. Quod &c.

Hypoth. 2.

Æquealtæ sunt rationes A, C.

Dico, æquales esse quantitates a, c.

De-

Demonstr.

11. *h.* *sup.* 9. 5. Ratio *B* ad *C*, est logarithmicè, vt *B* ad *A*. Ergo *b* ad *c*, est vt *b* ad *a*. Ergo æquales sunt *a*, *c*. Quod &c.

Hypoth. 3.

Depressior est ratio *A*, quàm *C*.

Dico, minorem esse quantitatem *a*, quàm *c*.

Demonstr.

def. 9. *h.* *sup.* Altior est, *C*, quàm *A*: ergo maior est *c*, quàm *a*: Ergo minor est *a*, quàm *c*. Quod &c.

Eodem modo demonstrabitur è conuerso: quòd si *a* quantitas, maior est quantitate *c*: etiam ratio *A*, ratione *C* est altior: si æqualis; æquealta: si minor; depressior. Quod. &c.

Quare &c.

Theor. 25. *Prop.* 25.

SI sint tres rationes, aliæque ipsis æquales numero, quę binæ, & in eadem ratione logarithmica sumantur: ex æquo autem, prima quàm tertia altior fuerit; erit & quarta, quàm sexta altior. Quod si prima tertiæ fuerit æquealta; erit & quarta æquealta sextæ: sin illa depressior; hæc quoque depressior erit.

Hypoth. commun.

Tres rationes *A*, *B*, *C*, aliæque tres *D*, *E*, *F*, binæ, & binæ sunt logarithmicè proportionales: *A* ad *B*, vt *D* ad *E*; *B* ad *C*, vt *E* ad *F*.

Hypoth. 1.

Altior eſt ratio *A*, quàm *C*.
Dico altiorem eſſe *D*, quàm *F*.

Demonſt.

12. *b.* | Maior eſt *B*, ad *C*, logarithmicè, quàm *B* ad
hypoth. | *A*. Sed *B* ad *C* eſt logarithmicè, vt *E* ad *F*: &
def. 12. *b* | *B* ad *A*, logarithmicè, vt *E* ad *D*. Ergo maior
17. *b.* | eſt *E* ad *F*, logarithmicè, quàm *E* ad *D*. Ergo
14. *b.* | altior eſt *D*, quàm *F*. Quod &c.

Hypoth. 2.

Æquealtæ ſunt rationes *A*, *C*.
Dico, æquealtas eſſe rationes *D*, *F*.

Demonſtr.

11. *b.* | Eadem eſt *B* ad *C*, logarithmicè, quæ *B*
ſup. | ad *A*. Ergo eadem eſt *E* ad *F* logarithmicè quæ
13. *b.* | *E* ad *D*. Ergo æquealtæ ſunt rationes *D*, *F*.
| Quod &c. *Hypoth.* 3.

Depreſſior eſt *A*, quàm *C*.
Dico, depreſſiorem eſſe *D*, quàm *F*.

Demonſtr.

def p. b. | Altior eſt enim *C*, quàm *A*: ergo altior eſt *F*,
1 *ſup.* | quàm *D*: ergo depreſſior eſt *D*, quàm *F*. Quod &c.
Quare &c.

Theor. 26. *Prop.* 26.

SI ſint tres quantitates, atque tres rationes, quę binæ, & in eadem ratione logarithmica ſumantur; fueritque

per-

perturbata earum proportio: ex æquo autem prima quantitas, quàm tertia, maior fuerit; erit & prima ratio, quàm tertia, altior. Quod si prima tertiæ fuerit æqualis quantitas; erit & prima tertiæ, æquealta ratio: sin illa minor, hęc quoque depressior erit. Et è conuerso.

Hyppth. commun.

Tres quantitates *a*, *b*, *c*, atque tres rationes *A*, *B*, *C*, binę, & binæ, sunt logarithmicè, proportionales; & earum perturbata est proportio: quantitates enim *a* ad *b*, & rationes *B* ad *C*, sunt logarithmicè proportionales: necnon quantitates *b* ad *c*, & rationes *A* ad *B*, sunt logarithmicè proportionales.

Hypoth. 1.

Maior est *a*, quàm *c*.
Dico altiorem esse *A*, quàm *C*.

Demonstr.

8. 5. Maior est *b* ad *c* ratio, quàm *b* ad *a*; Sed
hypoth. *def.* 8. *h.* *b* ad *c*, est logarithmicè, vt *A* ad *B*: & *b* ad
17. *h.* *a*, logarithmicè, vt *C* ad *B*. Ergo *A* ad *B*,
14. *h.* maior est logarithmicè, quàm *C* ad *B*. Ergo altior est *A*, quàm *C*. Quod &c.

Hypoth. 2.

Æquales sunt *a*, *c*.
Dico æquealtas esse *A*, *C*.

Demonstr.

7. 5. Eadem est *b* ad *c*, quæ *b* ad *a*. Ergo eadem
sup. 13. *b.* est logarithmicè *A* ad *B*, quæ *C* ad *B*. Ergo *A*, *C* sunt æquealtæ. Quod &c. *Hy-*

Hypoth. 3.

Minor est *a*, quàm *c*.

Dico depressiorem esse *A*, quàm *C*.

Demonstr.

sup. | Maior est *c*, quàm *a*: Ergo altior est *C*, quàm
def. 2. h. | *A*: ergo depressior est *A*, quàm *C*. Quod &c.

Eodem modo demonstrabitur è conuerso: quòd si ratio *A*, ratione *C*, est altior; etiam quantitas *a*, quantitate *c*, est maior: si æquealta; æqualis: si depressior; minor. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 27. Prop 27.

SI sint tres rationes, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione logarithmica sumantur; fueritque perturbata earum proportio logarithmica: ex æquo autem prima, quàm tertia altior fuerit; erit & quarta, quàm sexta, altior. Quòd si prima tertiæ fuerit æquealta; erit & quarta æquealta sextæ: sin illa depressior; hæc quoque depressior erit.

Hypoth. commun.

Tres rationes *A*, *B*, *C*, aliæque tres *D*, *E*, *F*, binæ, & binæ, sunt logarithmicè proportionales; & earum perturbata est proportio: sunt enim *A* ad *B*, & *E* ad *F*, logarithmicè proportionales: necnon *B* ad *C*, & *D* ad *E*, sunt proportionales logarithmicè:

Hy-

Hypoth. 1.

Altior eſt *A*, quàm *C*.

Dico altiorem eſſe *D*, quàm *F*.

Demonſtr.

12. *h.* Maior eſt logarithmicè, *B* ad *C*, quàm *B* ad
hypoth. *A*: ſed *B* ad *C*, eſt vt *D* ad *E*: & *B* ad *A* eſt,
*def.*12.*h* vt *F* ad *E*, logarithmicè: ergo *D* ad *E* maior
17. *h.* eſt logarithmicè, quàm vt *F* ad *E*: Ergo *D* al-
14. *h.* tior eſt, quàm *F*. Quod &c.

Hypoth. 2.

Æquealtæ ſunt *A*, *C*.

Dico æquealtas eſſe *D*, *F*.

Demonſtr.

11. *h.* Eadem eſt *B* ad *C* logarithmicè, quæ *B* ad
ſup. *A*. Ergo eadem eſt *D* ad *E* logarithmicè, quæ
13. *h.* *F* ad *E*. Ergo *D*, *F* ſunt æquealtæ. Quod &c.

Hypoth. 3.

Depreſſior eſt *A*, quàm *C*.

Dico depreſſiorem eſſe *D*, quàm *F*.

Demonſtr.

def. p.h. Altior eſt *C*, quàm *A*: ergo altior eſt *F*, quàm
ſup. *D*: ergo depreſſior eſt *D*, quàm *F*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 28. *Prop.* 28.

SI ſint quotcunque rationes totidemque quantitates, quæ binæ, in eadem ratione logarithmica ſumantur:

&

& ex æqualitate in eadem erunt ratione logarithmica.

Hypoth.

Sint quotcunque rationes *A, B, C, D,* totidemque quantitates *a, b, c, d*: binæ, & binæ logarithmicè proportionales: *A* ad *B*, vt *a* ad *b*; *B* ad *C*, vt *b* ad *c*; *C* ad *D*, vt *c* ad *d*.

Dico ex æqualitate, *A* ad *C*, & *a* ad *c*, esse logarithmicè proportionales.

Item *A* ad *D*, & *a* ad *d* esse logarithmicè proportionales.

Præpar.

Rationis *A*, & quantitatis *a*, sumantur æquemultiplicata, & multiplex, 3*A*, 3*a*: item rationis, & quantitatis, *B*, *b*, sumantur, 4*B*, 4*b*: & rationis, & quantitatis, *C*, *c*, sumantur, 2*C*, 2*c*.

Demonstr.

hypoth. | Quoniam *A* ad *B*, & *a* ad *b*, sunt logarithmicè proportionales: ergo 3*A* ad 4*B*, & 3*a* ad 4*b*, sunt logarithmicè proportionales.
6. h. | Item quoniam *B* ad *C*, & *b* ad *c*, sunt loga-
hypoth. | rithmicè proportionales: ergo 4*B* ad 2*C*, &
6. h. | 4*b* ad 2*c*, sunt logarithmicè proportionales. Er-
24. h. | go ex æquali, si 3*A* est altior, quàm 2*C*; etiam 3*a* est maior, quàm 2*c*: si æquealta; æqualis: si
def. 8. h. | depressior; minor. Ergo *A* ad *C*, & *a* ad *c* sunt logarithmicè proportionales. Quod &c.
hypoth. | Sunt autem *C* ad *D*, & *c* ad *d*, logarithmicè pro-

sup. cè proportionales. Ergo *A* ad *D*, & *a* ad *d*, sunt logarithmicè proportionales. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 29. Propos. 29.

SI sint quotcunque rationes, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ, & in eadem logarithmica ratione sumantur: & ex æqualitate, in eadem erunt logarithmica ratione.

Hypoth.

Sint quotcunque rationes, & aliæ totidem, *A*, *B*, *C*, *D*, & *E*, *F*, *G*, *H*: quæ binæ, & in eadem ratione sumantur: videlicet, *A* ad *B*, & *E* ad *F*: item *B* ad *C*, & *F* ad *G*: necnon *C* ad *D*, & *G* ad *H*.

Dico ex æqualitatę *A* ad *C*, & *E* ad *G*, esse logarithmicè, proportionales.

Item *A* ad *D*, & *E* ad *H*, esse logarithmicè proportionales.

Præpar.

Rationum *A*, *E*, sumantur æquemultiplicatæ, 3*A*, 3*E*: item rationum *B*, *F*, æquemultiplicatæ 4*B*, 4*F*: & rationunm *C*, *G*, æquemultiplicatæ 2*C*, 2*G*.

Demonstr.

hypoth. Quoniam *A* ad *B*, & *E* ad *F*, sunt loga-
7. h. rithmicè proportionales, etiam 3*A* ad 4*B*, & 3*E* ad 4*F*, sunt logarithmicè proportionales.
hypoth. item quoniam *B* ad *C*, & *F* ad *G*, sunt lo-

 gari-

7. b. garithmicè proportionales; etiam $4B$ ad $2C$, & $4F$ ad $2G$, sunt logarithmicè, proportio-
25. b. nales. Ergo si $3A$ altior est quàm $2C$; etiam $3E$ altior est, quàm $2G$: si æquealta; æquealta: si
def. 12. b depressior; depressior. Ergo A ad C, & E ad G, sunt logarithmicè proportionales. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 30. Prop. 30.

SI sint tres quantitates, totidemque rationes, quæ binæ in eadem ratione logarithmica sumantur; fuerit autem perturbata earum proportio: & ex æqualitate, in eadem erunt ratione logarithmica.

Hypoth.

Sint tres quantitates a, b, c, totidemque rationes A, B, C, binæ, & binæ logarithmicè proportionales, & earum sit perturbata proportio: nempe sint a ad b, & B ad C, logarithmicè proportionales: & b ad c, & A ad B, logarithmicè proportionales.

Dico, a ad c, & A ad C, esse logarithmicè proportionales.

Præpar.

Sumantur ipsarum a, b, quantitatum æquemultiplices $3a$, $3b$, & rationis A, æquemultiplicata $3A$. ipsarum quoque rationum B, C, & quantitatis c, sumantur æquemultiplicatæ rationes $4B$, $4C$, & æquemultiplex quantitas $4c$.

De-

Demonstr.

hypoth. Quoniam *b* ad *c*, & *A* ad *B*, sunt logarithmicè proportionales:
6. h. etiam 3*b* ad 4*c*, & 3*A* ad 4*B*, sunt logarithmicè proportionales:
15. 5. sunt autem 3*a* ad 3*b*, sicut *a* ad *b*:
hypoth. & *a* ad *b*, sicut logarithmicè *B* ad *C*:
19. h. & *B* ad *C* logarithmicè, sicut 4*B* ad 4*C*.
17. h. Ergo 3*a* ad 3*b*, est vt 4*B* ad 4*C*. Sed ostensum est, 3*b* ad 4*c*, esse logarithmicè, vt 3*A* ad 4*B*.
26. h. ergo ex æquali, si 3*a* est maior, quàm 4*c*; etiam 3*A* est altior, quàm 4*C*: si æqualis; æquealta: si minor; depressior.
def.8.h. Ergo *a* ad *c*, est logarithmicè, sicut *A* ad *C*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 31. Prop. 31.

SI sint tres rationes, aliæque ipsis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione logarithmica sumantur, fuerit autem perturbata earum proportio logarithmica: etiam ex æqualitate, in eadem erunt logarithmica ratione.

Hypoth.

Tres rationes *A*, *B*, *C*, aliæque tres *D*, *E*, *F*, binæ sunt in eadem ratione logarithmica, & earum est perturbata proportio logarithmica; sunt enim *A* ad *B*, & *E* ad *F* logarithmicè proportionales: necnon *B* ad *C*, & *D* ad *E* sunt logarithmicè proportionales.

Dico, ex æquali, *A* ad *C*, & *D* ad *F*, esse logarithmicè proportionales.

Præpar.

Rationum A, B, D, ſumantur æquemultiplicatæ $3A$, $3B$, $3D$: & rationum C, E, F, aliæ ſumantur ęquemultiplicatæ $4C$, $4E$, $4F$.

Demonſtr.

19. h. hypoth. 19. h. 17. h. hypoth. 7. h. 27. h. def. 12. h

Rationes $3A$ ad $3B$, & A ad B, ſunt logarithmicè proportionales: rationes A ad B, & E ad F, ſunt logarithmicè proportionales: rationes E ad F, & $4E$ ad $4F$, ſunt logarithmicè proportionales: ergo rationes $3A$ ad $3B$, & $4E$ ad $4F$, ſunt logarithmicè proportionales. Et quoniã B ad C, & D ad E rationes, logarithmicè ſunt proportionales: etiam $3B$ ad $4C$, & $3D$ ad $4E$ rationes, logaritmicè ſunt proportionales. Ergo ex æquali, ſi $3A$ eſt altior, quàm $4C$; etiam $3D$ eſt altior, quàm $4F$: ſi ęquealta; ęquealta: ſi depreſſior; depreſſior. Ergo A ad C, & D ad F rationes, ſunt logarithmicè proportionales. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 32. Prop. 32.

SI prima ratio ad ſecundam, logarithmicè fuerit, ſicut prima quantitas ad ſecundam; tertia quoque ratio ad ſecundam, logarithmicè fuerit, ſicut tertia quantitas ad ſecundam: etiam compoſita ex prima, & tertia ratione, ad ſecundam, erit logarithmicè, ſicut aggregata quantitas

ex

ex prima, & tertia, ad secundam.

Hypoth.

Sint *A*, *B*, *C* rationes, & *a*, *b*, *c*, quantitates: & sit *A* ad *B* logarithmicè, sicut *a* ad *b*: item *C* ad *B* logarithmicè, sicut *c* ad *b*.

Dico *A*+*C* ad *B*, esse logarithmicè, sicut *a*+*c* ad *b*.

Demonstr.

hypoth. Quoniam *C* ad *B*, est logarithmicè, sicut *c* ad *b*: *def. 8. h.* conuertẽdo, *B* ad *C*, est logarithmicè, sicut *b* ad *c*: *hypoth.* Sed *A* ad *B*, est logarithmicè, sicut *a* ad *b*: *28. h.* ergo ex ęquali *A* ad *C*, est logarithmicè, sicut *a* ad *c*: *22. h.* ergo componendo *A*+*C* ad *C*, est logarithmicè, sicut *a*+*c* ad *c*. *hypoth.* Sed *C* ad *B* est logarithmicè, sicut *c* ad *b*: *28. h.* ergo ex æquali *A*+*C* ad *B* est logarithmicè sicut *a*+*c* ad *b*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 33. Prop. 33.

SI prima ratio ad secundam, eadem logarithmicè fuerit, quæ tertia ad quartam; fuerit autem, & quinta ad secundam, eadem logarithmicè, quæ sexta ad quartam: erit & composita prima cum quinta ad secundam, eadem quæ composita tertia cum sexta ad quartam.

Hypoth.

Rationes *A* ad *B*, & *C* ad *D*, sunt proportionales: item *E* ad *B*, & *F* ad *D*, sunt proportionales.

Dico *A*+*E* ad *B*, & *C*+*F* ad *D*, esse proportionales.

De-

Demonſtr.

hypoth. Quoniam E ad B, & F ad D, ſunt logari-
def.11.h thmicè proportionales: conuertendo B ad E,
& D ad F, ſunt logarithmicè proportionales:
hypoth. ſed A ad B, & C ad D, ſunt logarithmicè
29. h. proportionales: Ergo ex æquali A ad E, & C
22. h. ad F; ſunt logarithmicè proportionales: ergo
componendo $A+E$ ad E, & $C+F$ ad F, ſunt
hypoth. logarithmicè proportionales. Sed E ad B, &
29. h. F ad D, ſunt logarithmicè proportionales. Ergo $A+E$ ad B, & $C+F$ ad D, ſunt logarithmicè proportionales. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 34. Prop. 34.

SI rationes quatuor fuerint logarithmicè proportionales: compoſita ex duabus, altiore omnium, & depreſſiore omnium, altior eſt, quàm compoſita ex reliquis duabus.

Hypoth.

Sint rationes A ad B, & C ad D logarithmicè proportionales: Et eſto A altior, quàm B, necnon altior quàm C. Et quoniam A altior eſt, quàm C: ergo B altior eſt, quàm D. Ergo A altior eſt omnium; & D depreſſior omnium.

Dico rationem $A+D$, altiorem eſſe ratione $B+C$.

Præ-

Præpar.

Quoniam A altior eſt, quàm $\mathcal{B}$: ſumatur E ratio quacum compoſita $\mathcal{B}$, facit rationem A: vt ita ratio A, ſit eadem, quę $\mathcal{B}+E$. Item quoniam C altior eſt, quàm D: ſumatur F ratio, quacum compoſita D, facit rationem C: vt ita ratio C, ſit eadem, quæ $D+F$.

Demonſtr.

hypoth. Quoniam A ad $\mathcal{B}$, & C ad D, ſunt logarithmicè proportionales: *conſtr.* & eſt A, eadem, quæ *11. h.* $\mathcal{B}+E$: & C, eadē, quæ $D+F$. ergo $\mathcal{B}+E$ ad $\mathcal{B}$, & $D+F$ ad D, ſunt logarithmicè proportiona- *21. h.* les: ergo diuidendo, E ad $\mathcal{B}$, & F ad D, ſunt *h poth.* logarithmicè proportionales. Sed $\mathcal{B}$ altior eſt, *18. h.* quàm D: ergo E altior eſt, quàm F: compo- *4. 3.* ſitiſque communiter $\mathcal{B}$, & D rationibus; ergo *conſtr.* $\mathcal{B}+E+D$ ratio, altior eſt, quàm $\mathcal{B}+D+F$. Sed $\mathcal{B}+E$, ratio eadem eſt, quæ A: & $D+F$, eadem quæ C: ergo $A+D$ altior eſt, quàm $\mathcal{B}+C$. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 35. Prop. 35.

RAtiones proportionales, per conuerſionem rationis, ſunt proportionales.

Hypoth.

Rationes A ad $\mathcal{B}$, & C ad D ſunt logarithmicè proportionales: & eſt A altior, quàm $\mathcal{B}$: ideoque etiam C, altior

altior eſt, quàm D.

Dico A ad $A - B$, eſſe logarithmicè, ſicut C ad $C - D$.

Demonſtr.

hypoth. | $A; B : C; D$.
21. h. | $A - B; B : C - D; D$.
def.12.h | $B; A; D; C$.
29. h. | $A - B; A : C - D; C$.
def.12.h | $A; A - B : C; C - D$. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 36. Prop. 36.

Rationes logarithmicè proportionales, per homologiam ſunt logarithmicè proportionales.

Demonſtr.

def.12.h Nam conuertendo, rationes fiunt proportio-
23. h. nales: item homologas depreſſiores ab homologis
22. h. altioribus decomponendo: & adcomponendo; &
35. h. per conuerſionem rationis: & diuidendo: & æque-
21. h. multiplicando, & æqueſubmultiplicando: & per-
19. h. mutando: & colligendo: & ex æquali in propor-
20. h. tione logarithmica ordinata: coniunctiſque omni-
16. h. fariam argumentis huiuſmodi, quocunque ordi-
28. h. ne, per homologiam, logarithmicè proportionales fiunt. Quod &c.

Quare &c.

Petrus

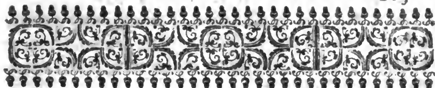
Petrus Mengolus, Io. Galeatio Manzio, iuueni studiosissimo. S. D.



Vintum hoc elementum, de nouis, & naturalibus logarithmis, cuiusque rationis inseparabiliter proprijs, quocum communicarem, neminem in mea, aut cuiusquam alterius Mathematici schola, satis noui dispositum, præter te, omnium bonarum artium, & in primis Mathematicarum studiosissimum. Et hac profectò insignis fælicitas, in comparabili virtuti accessit, & meritis Excellentissimi præceptoris tui Cassini: quòd te, tùm frequentem in Musæo auditorem, tùm in suis Astronomicis, & Aquaticis laboribus, comitem indiuiduum, & solertem nactus fuerit adiutorem. Itaque cum tuam mihi consuetudinem, rariùs hoc anno, quàm ante consueueras, offerres; mandaui, meum tui desiderium, tibi significari: vt meorum etiam studiorum particeps fieres, & consultor. Gratiam liberaliter fecisti, quàm volebam: meque domi aliquoties conuenisti, huiu-

sce opusculi partem hanc scriptitantem. Et ex me, tùm definitiones præcedentium elementorum, & rationes nominum, & propriam cuiusque vtilitatem elementi, necnon quasdam nobiliores demonstrationes audisti sparsim; tùm vel maximè numerosam methodum: qua hyperlogarithmorum, & hypologarithmorum, & logarithmorum rationes mihi contigit inuenire. tuque inuenti subtilitatem laudasti, quòd mihi Deus liberaliter tribuit: atque vtilitatem trigonometricam, ad faciliorem logarithmici canonis constructionem, optimè præuidisti. Ex laude tua, plurimum profecisse me fateor: nam alacrior factus, & ex tecum communicatione vegetior, multarum conclusionum, quas prænoui euidentissimis arithmeticis artificijs, quæ mihi supererant demonstranda, media lemmata reperire cæpi, longè fæliciùs. Libellum igitur hucusque non sine tuo adminiculo perfectum, offero: vt sermones indemonstratos, quos inuicem habebamus, per te ipsum legendo possis complere. Vale. meque, & labores meos, in primis Excellentissimo Cassino, deinde alijs tuis conscholaribus, & amicis, vt commendes, rogo.

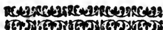
GEO-



GEOMETRIÆ SPECIOSÆ

ELEMENTVM QVINTVM.

DEFINITIONES.



1 Differentia duarum quantitatum, quando prima superat secundam, dicetur, Excessus primæ & secundæ.

2 Quando verò prima superatur à secunda, dicetur, Defectus primæ, & secundæ.

3. Similes differentiæ dicentur, excessus excessibus, & defectus defectibus.

4. Dissimiles verò, excessus defectibus.

5. Quatuor quantitates, dicentur, Arithmeticè dispositæ; cum primæ & secundæ, tertiæ & quartæ, fuerint similes, & æquales differentiæ.

6. Inuersio Arithmetica, dicetur; cum quatuor quantitates arithmeticè dispositæ, prima & secunda, tertia & quarta, rursum disponentur arithmeticè, secunda & prima, quarta & tertia.

7. Permutatio Arithmetica, dicetur: cum quatuor quantitates arithmeticè dispositæ, prima & secunda, tertia & quarta, rursum disponenter arithmeticè, prima & tertia, secunda & quarta.

8. Si fuerint aliquot quantitates, atque aliæ totidem, & fuerint prima & secunda primarum, item prima & secunda secundarum, dispositæ arithmeticè; fuerint quoque secunda & tertia primarum, item secunda & tertia secundarum, arithmeticè dispositæ; & sic deinceps vsque ad vltimas: dicentur primæ similiter esse dispositæ arithmeticè, atque secundę.

9. Quòd si prima & vltima primarum, item prima & vltima secundarum, fuerint arithmeticè dispositæ; dicentur, ita dispositæ, ex æqualitate arithmetica.

10. Tres quantitates, dicentur, arithmeticè ordinatę; cum primæ & secundæ, secundæ & tertiæ, similes, & ęquales fuerint differentiæ.

11. Plures quantitates, dicentur, arithmeticè ordinatæ; cum ternæ deinceps fuerint arithmeticè ordinatę: idest, cum primæ & secundæ, secundæ & tertiæ, tertiæ & quartæ, & deinceps vsque ad vltimam, similes, & æquales fuerint differentiæ.

12. Series naturalis arithmetica, dicetur; cuius ordinatarum arithmeticè quantitatum prima, dimidia est secundæ.

13. Quatuor quantitates, dicentur, Harmonicè dispositæ, cum differentia primæ & secundæ, ad similem differen-

rentiam tertiæ & quartæ, rationem compositam habuerit ex rationibus, primæ ad tertiam, & secundæ ad quartam.

14. Inuersio Harmonica, dicetur; cùm quatuor quantitates harmonicè dispositæ, prima & secunda, tertia & quarta, rursum disponentur harmonicè, secunda & prima, quarta & tertia.

15. Permutatio Harmonica, dicetur, cùm quatuor quantitates harmonicè dispositæ, prima & secunda, tertia & quarta, rursum disponentur harmonicè, prima & tertia, secunda & quarta.

16. Si fuerint aliquot quantitates, atque aliæ totidem; & fuerint prima & secunda primarum, item prima & secunda secundarum, dispositæ harmonicè; fuerint quoque secunda & tertia primarum, item secunda & tertia secundarum, dispositę harmonicè; & sic deinceps vsque ad vltimas: dicentur primæ similiter esse dispositæ harmonicè, atque secundæ.

17. Quòd si prima & vltima primarum, item prima & vltima secundarum, fuerint harmonicè dispositę; dicentur, ita dispositæ, ex æqualitate harmonica.

18. Tres quantitates, dicentur, harmonicè ordinatę; cum primæ & secundæ differentia, ad similem differentiam secundæ & tertiæ, fuerit sicut prima, quantitas ad tertiam.

19. Plures quantitates dicentur harmonicè ordinatæ, cum ternæ deinceps fuerint harmonicè ordinatæ: idest cum primæ & secundæ differentia, ad similem differentiam secundæ & tertiæ, fuerit vt prima ad tertiam; differentia

quo-

quoque ſecundæ & tertiæ, ad ſimilem differentiam tertiæ & quartæ, fuerit ſicut ſecunda ad quartam; & ſic deinceps vſque ad vltimam.

20. Series naturalis harmonica, dicetur, cuius ordinatarum harmonicè quantitatum prima, dupla eſt ſecundę.

21. Si à rationali, ſeries harmonica naturalis fuerit ordinata; & à quotoquouis ordinatorum terminorum quotcunque fuerint deinceps aſſumpti, & aggregati: ſumma, dicetur, Prologarithmus.

22. Porrò prologarithmus, dicetur Hyperlogarithmus earum rationum, quas habent inuicem, primus aſſumptus terminus, & proximus vlterior vltimo, non aſſumptus.

23. Et earum rationum Hypologarithmus, dicetur, quas habent inuicem, vltimus aſſumptus terminus, & proximus prior primo, non aſſumptus.

24. Quantitas omni minor hyperlogarithmo earumdem rationum, & omni maior hypologarithmo, earumdem Logarithmus, dicetur.

25. Ex totenis deinceps Prologarithmorum ſeries, dicetur: in qua, ex prioribus, dicetur, Primus; ex totidem immediatè ſequentibus, Secundus; ex alijs deinceps totidem, Tertius Prologarithmus; & ſic deinceps reliqui. Vt prologarithmorum, ex ternis à ſecundo, dicetur, Primus, qui ex ſecundo, tertio, & quarto fit collectis; Secundus, qui ex quinto, ſexto, & ſeptimo; Tertius, qui ex octauo, nono, & decimo; & ita deinceps.

26. Si

26. Si duo prologarithmi, ex inæqualibus multitudine terminis collecti fuerint; & cuius maior est multitudo terminorum, eius termini singuli, per alteram multitudinem fuerint æqualiter diuisi: siquidem factæ partes ordinatim sumptæ maiorum primùm terminorum, deinde minorum, & collectæ totenæ, quota est sua maior multitudo terminorum, maiores fuerint singulis terminis alterius prologarithmi: maior profectò prologarithmus erit, ex maioribus partibus; & dicetur, Perspectè maior.

27. Si verò factæ partes totenæ, minores fuerint singulis: erit profectò minor prologarithmus, ex minoribus partibus; & dicetur Perspectè minor.

28. Si quatuor proportionalium, rationalis fuerit prima: quarta, dicetur, Productus secundæ & tertiæ. Et significabitur charactere, ex vtrisque secundæ, ac tertiæ characteribus deinceps conscriptis composito. vtpote ad quam, rationalis habet rationem compositam ex rationibus ad tertiam, & ad secundam. Exempli gratiam. *u* ad *a*, est vt *b* ad *ab*. Item. *u* ad *ab*, est vt *c* ad *abc*.

29. Si verò quatuor proportionalium, rationalis fuerit secunda: quarta, dicetur, Fractio. & significabitur charactere tertiæ, ante characterem primæ scripto, & patrentheses clauso. Exempli gratia *a* ad *u* est vt *b* ad *b* (*a*). Item. *ab* ad *u* est vt *c* ad *c* (*ab*). Et *c* ad *u*, est vt *ab* ad *ab* (*c*).

30. Tertia autem, dicetur; Numerator fractionis: cuius character, scribetur supra lineolam, vt in charactere

fra-

fractionis, *b* (*a*), numerator est *b*.

31. Et prima, dicetur, Denominator fractionis: cuius character, scribetur infra lineolam. vt in charactere fractionis *b* (*a*), denominator est *a*.

32. Numerosa ratio dicetur, cui eandem habet numerus ad numerum.

33. Non numerosa ratio dicetur, cui nulla numerosa est eadem.

34. Non numerosæ rationis logarithmus, dicetur, quantitas, minor omni logarithmo altioris numerosæ rationis, & maior omni logarithmo depressioris.



Theor-

Theorema prima Propositio prima.

SI trium inæqualium quantitatum, minima, non est minor, quàm secunda potestas differentię extremarum: ipsa differentia extremarum, minor est, ad rationalem, quàm vt minima, ad defectum minimæ, & mediæ.

Hypoth.

Sunto tres inæquales quantitates a, $a+b$, $a+b+c$: & esto a, non minor, quàm $b2+2bc+c2$.

Dico $b+c$; u: minorem esse, quàm a; b.

Demonst.

hypoth. | $b2+2bc+c2$: non maior, quàm a.
8.5. | $b2+2bc+c2$; $b+c$: non maior, quàm a; $b+c$.
8. p. | $b2+2bc+c2$; $b+c$: $b+c$; u.
13.5. | $b+c$; u: non maior, quàm a; $b+c$.
8.5. | a; $b+c$: minor, quàm a; b.
13.5. | $b+c$; u: minor, quàm a; b. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 2. Prop. 2.

CVm trium inæqualium numerorum, minimus, non est minor, quàm secunda potestas differentię extremorum; si defectus medij & maximi denominetur à minimo; defectus verò minimi & medij auctus vnitate denominetur à maximo: fiunt duæ Fractiones; quarum summa, minor est, quàm differentia extremorum, vnitate aucta, denominata à medio.

Hypoth.

Sunto tres inæquales numeri a, $a+b$, $a+b+c$: & esto a, non minor, quàm $b2+2bc+c2$.

Dico c (a),$+b+u$ $(a+b+c)$: minorem esse, quàm $b+c+u$ $(a+b)$.

Demonstr.

p. h.	$b+c$; u: minor est, quàm a; b.
p. 3.	$b+c+u$; u: minor, quàm $a+b$; b.
3. 3.	$b+c+u$; $b+c$: maior, quàm $a+b$; a.

Itaque *per* 19.7. productus $b+c$, per $a+b$: minor est quàm productus $b+c+u$, per a.

Additoque communi producto a, per $a+b$. productus $b+c+a$, per $a+b$: minor, quàm summa productorum $b+c+u$, per a; & $a+b$, per a.

Et communiter multiplicando per c. productus $b+c+a$, per $a+b$, per c: minor, quàm summa productorum $b+c+u$, per a, per c; & $a+b$, per a, per c.

Additoque communi producto a, per $b+u$, per $a+b$. summa productorum $b+c+a$, per $a+b$, per c; & a, per $b+u$, per $a+b$: minor, quàm productus a, per $a+b+c$, per $b+c+u$.

Et communiter diuidendo, per a, per $a+b+c$, per $a+b$. c (a),$+b+u$ $(a+b+c)$: minor, quàm $b+c+u$ $(a+b)$. Quod &c.

Quare &c.

Theo-

Theor. 3. Prop. 3.

SI trium inæqualium numerorum, defectus medij & maximi, auctus vnitate, denominetur à minimo; defectus verò minimi & medij denominetur à maximo: fiunt duæ fractiones; quarum summa est maior, quàm differentia extremorum, vnitate aucta, denominata à medio.

Hypoth.

Sunto tres inæquales numeri, a, $a+b$, $a+b+c$.

Dico $c+u$ $(a)+b$ $(a+b+c)$: maiorem esse, quàm $b+c+u$ $(a+b)$.

Demonstr.

Productus $c+u$, per $a+b+c$, per b: maior est producto a, per c, per b.

Additoque communi producto a, per b, per $a+b$. summa productorum $c+u$, per $a+b+c$, per b; & a, per b, per $a+b$: maior est, quàm productus a, per b, per $a+b+c$.

Additoque communi producto $c+u$, per $a+b+c$, per a. summa productorum $c+u$, per $a+b+c$, per $a+b$; & a, per b, per $a+b$: maior est quàm productus a, per $b+c+u$, per $a+b+c$.

Et communiter diuidendo, per a, per $a+b+c$, per $a+b$. $c+u$ $(a)+b$ $(a+b+c)$: maior est, quàm $b+c+u$ $(a+b)$. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 4. Prop. 4.

QVatuor termini arithmeticè diſpoſiti, permutando, ſunt arithmeticè diſpoſiti.

Hypoth.

Quatuor termini a, $a+b$, c, $c+b$, ſunt arithmeticè diſpoſiti.

Dico permutando a, c, $a+b$, $c+b$ eſſe arithmeticè diſpoſitos.

Demonſtr.

def. 5. h. Siquidem a, maior eſt, quàm c; tantumdem $a+b$, maior eſt, quàm $c+b$: ſi minor, minor. Ergo a, c, $a+b$, $c+b$, ſunt arithmeticè diſpoſiti. Quod &c. Quare &c.

Theor. 5. Prop. 5.

SI fuerint aliquot quantitates, in vna ſerie, ſimiliter arithmeticè diſpoſitæ, atque totidem, in altera: erunt ex æqualitate arithmetica, prima & vltima, in vna ſerie, item prima & vltima, in altera, diſpoſitæ arithmeticè.

Hypoth.

Sint a, b, c, ſimiliter diſpoſitæ arithmeticè, atque aliæ totidem d, e, f.

Dico ex ęqualitate arithmetica, eſſe diſpoſitas arithmeticè, a, c, & d, f.

Demonſtr.

def. 8. h. Sunt enim a, b, d, e, arithmeticè diſpoſitę:
4. h. ergo permutando a, d, b, e, ſunt atithmeticè
def. 5. h. diſpoſitę: ergo differentia a, d, differentię b, e, ſimilis

similis est, & æqualis. Similiter ostendetur differentia b, e, differentiæ c, f, similis, & æqualis: ergo differentia a, d, differentiæ, c, f, similis
def.5.h. est, & æqualis: ergo a, d, c, f, sunt arithmeticè
4. h. dispositæ: ergo permutando, a, c, d, f, sunt arithmeticè dispositæ. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 6. Prop. 6.

ARithmeticè dispositarum ęquemultiplices, sunt arithmeticè dispositæ.

Hypoth.

Sint arithmeticè dispositæ a, $a+b$, c, $c+b$. quorum æquemultiplices $3a$, $3a+3b$, $3c$, $3c+3d$.

Dico $3a$, $3a+3b$, $3c$, $3c+3b$, esse dispositas arithmeticè.

Demonstr.

19. 5. Differentia $3a$, $3a+3b$, ad differentiam a, $a+b$, æquemultiplex est, atque $3a$ ad a: sed $3a$
19. 5. ad a, æquemultiplex est, atque $3c$ ad c: & $3c$ ad c, æquemultiplex: atque $3c+3b$ ad $c+b$: ergo differentia $3a$, $3a+3b$, ad differentiam a, $a+b$, æquemultiplex est, atque differentia $3c$, $3c$
def.5.h. $+3b$ ad differentiam c, $c+b$. Sed differentia a, $a+b$, æqualis est differentiæ c, $c+b$: ergo differentia $3a$, $3a+3b$, æqualis est differentiæ $3c$, $3c$ $+3b$.

Rur-

17. 7. Rursum differentia $3a$, $3a+3b$, similis est differentiæ a, $a+b$: & differentia a, $a+b$ similis
def.5.b. differentiæ c, $c+b$: & differentia c, $c+b$ similis
17. 7. differentiæ $3c$, $3c+3b$: Ergo differentia $3a$, $3a+3b$, similis est, & æqualis differentię $3c$; $3c+3b$:
def.5.b. Ergo $3a$, $3a+3b$, $3c$, $3c+3b$, sunt arithmeticè dispositæ. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 7. Prop. 7.

IN serie arithmetica naturali, aliquoteni ab vno, & aliquoteni ab altero, per numeros alterutrorum multitudinis terminorum multiplicati; sicut primi producti, similiter secundi, sunt arithmeticè dispositi: item tertij, & quarti, & sic deinceps.

Hypoth.

a, $a+1$, $a+2$. $a+3$, $a+4$, $a+5$.
b, $b+1$, $b+2$, $b+3$. $b+4$, $b+5$, $b+6$, $b+7$.
$4a$, $4a+4$, $4a+8$. $4a+12$, $4a+16$, $4a+20$.
$3b$, $3b+3$, $3b+6$, $3b+9$. $3b+12$, $3b+15$, $3b+18$, $3b+21$.

Sint in serie arithmetica naturali duo termini, a, b: & sint ab a, terni; & ternorum primi a, $a+1$, $a+2$; secundi $a+3$, $a+4$, $a+5$: & à b, sint quaterni; & quaternorum primi b, $b+1$, $b+2$, $b+3$; secundi, $b+4$, $b+5$, $b+6$, $b+7$.

Quoniam in serie arithmetica naturali proximorum differentiæ, sunt vnitates: ergo alternorum, sunt binarij; tertiorum, ternarij; quartorum, quaternarij; & sic deinceps.

ceps. Sunt autem primus primorum ex ternis, & primus secundorum, ab inuicem tertij: & primus primorum ex quaternis, & primus secundorum, ab inuicem quarti: ergo differentia a, $a+3$, est ternarius 3; & differentia b, $b+4$, & quaternarius 4. Multiplicentur itaque terni, per 4: & quaterni, per 3: & fiant multiplices terni, & quaterni primi; item terni, & quaterni secundi.

Dico multiplices primorum $4a+8$, $4a+4$, $4a$, $3b$, $3b+3$, $3b+6$, $3b+9$, esse similiter arithmeticè dispositos, atque secundorum, $4a+20$, $4a+16$, $4a+12$, $3b+12$, $3b+15$, $3b+18$, $3b+21$.

Demonstr.

hypoth. Termini $a+2$, $a+1$, a, sunt deinceps in serie arithmetica naturali, in qua sunt etiam termini
def.6.h. $a+5$, $a+4$, $a+3$. Ergo $a+2$, $a+1$, a, sunt similiter arithmeticè ordinati, atque $a+5$,
6.h. $a+4$, $a+3$: & eorum æquemultiplices $4a+8$, $4a+4$, $4a$, atque $4a+20$, $4a+16$, $4a+12$.

sup. Defectus simplicium a, $a+3$, est ternarius:
5.5. ergo earumdem quadruplicium defectus $4a$, $4a+12$, est productus 3, per 4. Item defectus simplicium b, $b+4$, est quaternarius: ergo earumdem triplicium defectus $3b$, $3b+12$, est
14.7. productus 4 per 3. Sed productus 3 per 4, est æqualis producto per 3. ergo defectus $4a$,
def.5.h. $4a+12$, æqualis est defectui $3b$, $3b+12$. Ergo $4a$, $4a+12$, $3b$, $3b+12$, sunt arithmeticè

$a, a+1, a+2. \quad a+3, a+4, a+5.$
$b, b+1, b+2, b+3. \quad b+4, b+5, b+6, b+7.$
$4a, 4a+4, 4a+8. \quad 4a+12, 4a+16, 4a+20.$
$3b, 3b+3, 3b+6, 3b+9. \quad 3b+12, 3b+15, 3b+18, 3b+21.$

4. *b.* cè dispositi. Ergo permutando $4a, 3b, 4a+12,$
5. *b.* $3b+12$, sunt arithmeticè dispositi. Ergo ex ęqua-
def.8.b. litate arithmetica, $4a+8, 4a+4, 4a, 3b$, sunt similiter arithmeticè dispositi, atque $4a+20, 4a+16, 4a+12, 3b+12.$

Ostendetur autem similiter vt supra, quod $3b, 3b+3, 3b+6, 3b+9$, sunt similiter arithmeticè dispositi, atque $3b+12, 3b+15, 3b+18,$
5. *b.* $3b+21$. Ergo ex ęqualitate arithmetica $4a+8,$
def.8.b. $4a+4, 4a, 3b, 3b+3, 3b+6, 3b+9$, sunt similiter arithmeticè dispositi, atque $4a+20, 4a+16, 4a+12, 3b+12, 3b+15, 3b+18, 3b+21$. Quod &c.

Quare primi terni ab a, & quaterni à b, sunt similiter arithmeticè dispositi, atque secundi. Et eadem demonstratione ostendemus, tum secundos, tum primos, esse similiter arithmeticè dispositos, atque tertios, & atque quartos, & sic deinceps.

Theor. 8. *Prop.* 8.

PRoducti, compositam habent rationem producentium.

Hy-

Hypoth.

Esto quantitatum a, b, productus ab; & quantitatum c, d, productus cd.

Dico $ab; cd: a; c, + b; d$.

Demonstr.

def. 28 b | $ab; u: a; u, + b; u$.
def. 28 b | $u; cd: u; c, + u; d$.
p. p. | $ab; cd: a; c, + b; d$. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 9. Prop. 9.

PRoducti communem habentes producentem, sunt vt producentes non communes.

Hypoth.

Esto quantitatum a, b, productus ab; & quantitatum a, c, productus ac.

Dico $ab; ac: b; c$.

Demonstr.

8. h. | $ab; ac: b; a, + a; c$.
def. 5. 6. | $b; a, + a; c: b; c$.
p. p. | $ab; ac: b; c$. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 10. Propos. 10.

FRactiones eumdem habentes denominatorem, sunt inter se, vt numeratores.

Hypoth.

Fractionum communis denominator esto *a*: sunto numeratores *b*, *c*.

Dico *b* (*a*); *c* (*a*): *b*; *c*.

Demonstr.

def.29h	*a*; *u*: *b*; *b* (*a*).
def.29h	*a*; *u*: *c*; *c* (*a*),
11. 5.	*b*; *b* (*a*): *c*; *c* (*a*).
2. *p.*	*b* (*a*); *c* (*a*): *b*; *c*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 11. *Prop.* 11.

Quatuor proportionalium quarta est fractio, in qua numerator est productus secundæ & tertiæ, denominator est prima.

Hypoth.

Sunto proportionales prima *a*, secunda *b*, tertia *c*.

Dico *a*; *b*: *c*; *cb* (*a*).

Demonstr.

def.29h	*a*; *u*: *c*; *c* (*a*).
def.28h	*u*; *b*: *c*; *cb*
10. *h.*	*c*; *cb*: *c* (*a*); *cb* (*a*).
11. 5.	*u*; *b*: *c* (*a*); *cb* (*a*).
p. p.	*a*; *b*: *c*; *cb* (*a*). Quod &c. Quare &c.

Theor. 12. *Prop.* 12.

Fractiones, quarum numeratores æquales, reciprocè sunt, vt denominatores. *Hy-*

Hypoth.

Esto fractionum numerator communis *a*: & sunto denominatores *b*, *c*.

Dico *b*; *c*: *a* (*c*); *a* (*b*).

Demonstr.

def.29h	*b*; *u*: *a*; *a* (*b*).
def.29b	*c*; *u*: *a*; *a* (*c*).
def.6.5.	*u*; *c*: *a* (*c*); *a*.
p. p.	*b*; *c*: *a* (*c*); *a* (*b*). Quod &c.

Quare &c.

Theor. 13. *Prop.* 13.

DVorum productorum, quorum producentes partim communes, partim sunt non communes, primo alterum denominante, fit eadem fractio; quæ, non communium producentium, primo alterum denominante.

Hypoth.

Sunto producti *a b c*, *d b c*: quorum communis producens, *b c*; non communes, *a*, *d*. Et denominante *a b c*, numeratorem *d b c*; necnon denominante *a*, numeratorem *b*, fiant fractiones *d b c* (*a b c*), *d* (*a*).

Dico *d b c* (*a b c*): *d* (*a*).

Demonstr.

def.29h	*a b c*; *u*: *d b c*; *d b c* (*a b c*).
2. *p.*	*a b c*; *d b c*: *u*; *d b c* (*a b c*).
9. *h.*	*a*; *d*: *a b c*; *d b c*.
11. 5.	*a*; *d*: *u*; *d b c* (*a b c*).

2. p. | $a; u: d; dbc\ (abc)$.
def. 29 b | $a; u: d; d\ (a)$.
9. 5. | $dbc\ (abc): d\ (a)$. Quod &c.
Quare &c.

Theor. 13. *Prop.* 13.

FRactiones, quarum numeratores æquales, & denominatores arithmeticè dispositi, sunt harmonicè dispositæ.

Hypoth.

Esto quatuor fractionum numerator communis a, & sunto denominatores arithmeticè dispositi b, c, d, e.

Dico $a\ (b)$, $a\ (c)$, $a\ (d)$, $a\ (e)$ esse harmonicè dispositas.

Demonstr.

12. b. | Si differentia b, c, est defectus: ergo reciprocè differentia $a\ (b)$, $a\ (c)$, est excessus: & est differentia d, e, defectus: & reciprocè differentia $a\ (d)$, $a\ (e)$ est excessus: Quod si differentia b, c, est excessus: etiam differentia d, c, est excessus: & differentia $a\ (b)$, $a\ (c)$, reciprocè est defectus: necnon differentia $a\ (d)$, $a\ (e)$, est defectus. Quare factionum $a\ (b)$, $a\ (c)$, & $a\ (d)$, $a\ (e)$, similes sunt differentiæ. Esto differentia b, c, defectus. Ergo differentia $a\ (b)$, $a\ (c)$ est excessus: item differentia $a\ (d)$, $a\ (e)$.
hypoth. | $c - b$: $e - d$.

pro-

producendo per ade, & abc.

9. b. $acde \rightarrow abde$; $abce \rightarrow abcd$: ade; abc: de; bc.

denominando communiter per $bcde$.

13. b. $a\,(b) \dashrightarrow a\,(c)$; $a\,(d) \rightarrow a\,(e)$: de; bc.

8. b. de; bc: d; b, $+e$; c.

12. b. d; b: $a\,(b)$; $a\,(d)$.

12. b. e; c: $a\,(c)$; $a\,(e)$.

p. p. de; bc: $a\,(b)$; $a\,(d)$, $+a\,(c)$; $a\,(e)$.

11. 5. $a\,(b) \dashrightarrow a\,(c)$; $a\,(d) \dashrightarrow a\,(e)$: $a\,(b)$; $a\,(d)$, $+a\,(c)$; $a\,(e)$.

def. 13. b. $a\,(b)$, $a\,(c)$, $a\,(d)$, $a\,(e)$ sunt harmonicè dispositæ. Quod &c.

Similiter ostendetur, si differentia b, c, est excessus.

Quare &c.

Theor. 15. Prop. 15.

FRactiones, quarum numeratores æquales, & denominatores arithmeticè ordinati, sunt harmonicæ ordinatæ.

Hypoth.

Esto fractionum numerator communis a: & sunto denominatores arithmeticè ordinati, b, c, d, e.

Dico $a\,(b)$, $a\,(c)$, $a\,(d)$, $a\,(e)$ esse harmonicè ordinatas.

Demonstr.

hypoth. b, c, d, sunt arithmeticè ordinati.

b, c,

def.5.h. | b, c, c, d, sunt arithmeticè dispositi.
14. h. | a (b), a (c), a (c), a (d), sunt harmonicè dispositæ.
| Differentia a (b), a (c), ad similem diffe-
def.13 h | rentiam a (c), a (d), rationem habet compo-
def.5.6. | sitam ex rationibus, a (b) ad a (c), & a (c) ad a (d): ideſt camdem, quàm habet a (b) ad a (d).
def.18h | a (b), a (c), a (d), sunt harmonicè ordinatæ.
sup. | a (c), a (d), a (e), sunt harmonicè ordinatę.
def.19h | a (b), a (c), a (d), a (e), sunt harmonicè ordinatæ. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 16. Prop. 16.

SI aliquot fractiones, aliæque totidem, communem habentes numeratorem, denominatores habuerint similiter arithmeticè dispositos, erunt & ipsæ similiter harmonicè dispositæ.

Hypoth.

Sunto tres fractiones, aliæque tres, quarum communis numerator a: sint autem denominatores b, c, d, similiter arithmeticè dispositi, atque denominatores e, f, g.

Dico a (b), a (c), a (d), similiter harmonicè dispositas esse, atque a (e), a (f), a (g).

Demonstr.

hypoth. | b, c, d, sunt similiter arithmeticè dispositi, atque e, f, g.

b, c, e,

def.8.b. b, c, e, f, sunt arithmeticè dispositi.
c, d, f, g, sunt arithmeticè dispositi.
14.h. a (b), a (c), a (e), a (f), sunt harmonicè dispositæ:
a (c), a (d), a (f), a (g), sunt harmonicè dispositæ.
def.16 h. a (b), a (c), a (d), sunt similiter harmonicè dispositæ, atque a (e), a (f), a (g). Quod &c.

Quare &c.

Theor. 17. Prop. 17.

IN serie arithmetica, non maior, quàm dimidius termini proximi, non est medius.

Hypoth.

Sunto in serie arithmetica, tres termini a, b, c.
Dico b, maiorem esse, quàm dimidium, ad c.

Demonstr.

Esto b, non maior, quàm dimidius ad c, si potest: eritque b, ęqualis, vel minor, quàm dimidius ad c: eritque differentia b, c, defectus: cuius
def. 10. similis differentia a, b, erit defectus.
hypoth. b; c: non maior, quàm dimidius.
19. 7. $2b$: non maior, quàm c.
b: non maior, quàm $c - b$.
def.10.h. $c - b$: $b - a$.
b: non maior, quàm $b - a$.
$b + a$: non maior, quàm b. quod est absurdum.

b non

b non est dimidius ad c. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 18. *Prop.* 18.

IN serie harmonica, terminus non minor, quàm duplus termini proximi, non est medius.

Hypoth.

Sunto in serie harmonica tres termini a, b, c.

Dico b, minorem esse, quàm duplum, ad c.

Demonstr.

Esto b, non minor, quàm duplus ad c, si po-
def.18.b teſt. eritque differentia b, c, excessus: item differentia a, b, erit excessus.
def.18.b $a - b$; $b - c$: a; c.
hypoth. b; c: non minor, quàm duplus.
19. 7. b: non minor, quàm $2c$.
$b - c$: non minor, quàm c.
14. 5. $a - b$: non minor, quàm a. Quod est absurdum.
b, minor est, quàm duplus ad c. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 19. *Prop.* 19.

QVælibet quantitas, & omnes eius multiplices ordinatæ, sunt in serie arithmetica naturali.

Hypoth.

Esto quantitas a, cuius multiplices ordinatæ $2a$, $3a$, $4a$, & c.

Dico

Dico *u*, 2*u*, 3*u*, 4*u*, & *c.* esse in serie arithmetica naturali.

Demonstr.

Omnes differentiæ *u*, 2*u*, & 2*u*, 3*u*, & 3*u*,
hypoth. 4*u*, & reliquæ, sunt similes, & æquales ipsi ratio-
def.12.h nali *u*: & est *u* ad 2*u* dimidia. Ergo *u*, 2*u*, 3*u*,
4*u*, & *c.* sunt in serie arithmetica naturali.
Quod &c.

Quare &c.

Theor. 20. *Prop.* 20.

QVælibet quantitas, & omnes eius submultiplices ordinatæ, sunt in serie harmonica naturali.

Hypoth.

Esto quantitas *u*, cuius submultiplices *u* (2), *u* (3), *u* (4), &c.

Dico *u*, *u* (2), *u* (3), *u* (4), &c. esse in serie harmonica naturali.

Demonst.

19. h. *u*, 2, 3, 4, &c. sunt in serie arithmetica.
15. h. *u*, *u* (2), *u* (3), *u* (4), &c. sunt in serie harmonica.
hypoth. *u*; *u* (2): est dupla.
def.20h *u*, *u* (2), *u* (3), *u* (4), &c. sunt in serie harmonica naturali. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 21. Prop. 21.

IN duabus feriebus arithmeticis naturalibus, termini funt fimiliter proportionales, in proportione ordinata.

Hypoth.

Sint duæ feries arithmeticæ naturales: vna *a*, 2*a*, 3*a*, 4*a*, &c. altera *b*, 2*b*, 3*b*, 4*b*, &c.

Dico *a*, 2*a*, 3*a*, 4*a*, effe fimiliter proportionales atque *b*, 2*b*, 3*b*, 4*b*, in proportione ordinata.

Demonftr.

def.11.h.	Defectus deinceps *a*, 2*a*, 3*a*, 4*a*, funt æquales inter fe, & ipfi primo termino *a*. item defectus deinceps *b*, 2*b*, 3*b*, 4*b*, funt æquales inter fe, & ipfi *b*.
def.12.h	*a*; 2*a*: *b*; 2*b*.
2. p.	2*a*; 3*a*: 2*b*; 3*b*:
2. p.	3*a*; 4*a*: 3*b*; 4*b*.
def.18.5	*a*, 2*a*, 3*a*, 4*a*, funt fimiliter proportionales, atque *b*, 2*b*, 3*b*, 4*b*, in proportione ordinata. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 22. Prop. 22.

IN duabus feriebus harmonicis naturalibus, termini funt fimiliter proportionales, in proportione ordinata.

Hypoth.

Sint duæ feries harmonicæ naturales: vna, *a*, *a* (2), *a* (3), *a* (4): altera *b*, *b* (2), *b* (3), *b* (4).

Dico

Dico a, a (2), a (3), a (4), esse similiter proportionales, atque b, b (2), b (3), b (4), in proportione ordinata.

Demonstr.

def.20b	a; a (2): b; b (2).
2. p.	a,---a (2); a (2): b,---b (2); b (2).
	Esto, si potest, a (2); a (3): maior, quàm b (2); b (3).
4. 3.	a (2); a (2)---a (3): minor, quàm b (2); b (2)---b (3).
p. 3.	a,---a(2); a(2)---a(3): minor quàm b,---b(2); b (2)---b (3).
def.18b	a,---a (2); a(2)---a(3): a; a (3).
def.18b	b,---b(2); b (2)---b (3): b; b (3).
p. 3.	a; a (3): minor, quàm b; b (3).
def.20b	a (2); a: b (2); b.
p. 3.	a (2); a (3): minor, quàm b(2); b(3). contra suppositum.
	a (2); a (3): b (2); b (3).
sup.	a (3); a (4): b (3); b (4).
def.18.5	a, a (2), a (3), a (4) sunt similiter proportionales, atque b, b (2), b (3), b (4) in proportione ordinata. Quod &c. Quare &c.

Theor. 23. Prop. 23.

Duarum serierum naturalium arithmeticę, & harmonicè, inter æqueordinatos terminos, medij pro-

portionales ſunt æquales.

Hypoth.

Sint duæ ſeries naturales: vna arithmetica, ab *a*; altera harmonica, à *b*. & ſint quarti termini; in arithmetica, 4*a*; in harmonica, *b* (4). ſit autem inter *a*, *b*, media proportionalis *c*.

Dico *c*, mediam proportionalem eſſe, inter 4*a*, & *b* (4).

Demonſtr.

Quoniam 4*a*, *b* (4), ſunt quarti termini, in
19. *h.* ſuis ſeriebus: 4*a* ad *a*, eſt quadruplus: & *b* (4) ad
20. *h.* *b* ſubquadruplus.
4*a*; *a*: *b*; *b* (4).
hypoth. *a*; *c*: *c*; *b*.
p. p. 4*a*; *c*: *c*; *b* (4). Quod &c.

Quare &c.

Theor. 24. *Prop.* 24.

IN ſerie arithmetica duo termini, cum æqueordinatis in harmonica, ſunt reciprocè proportionales.

Hypoth.

Sint in ſerie arithmetica duo termini 3*a*, 4*a*: & in harmonica duo æqueordinati *b* (3), *b* (4).

Dico 3*a*; 4*a*: *b* (4); *b* (3).

Præpar.

Aſſumatur inter æqueordinatos 3*a*, & *b* (3), medius proportionalis *c*.

De-

Demonstr.

constr.	3*a*; *c*: *c*; *b* (3).
23. *b.*	4*a*; *c*: *c*; *b* (4).
2. *p.*	*c*; 4*a*: *b* (4); *c*.
p. p.	3*a*; 4*a*: *b* (4); *b* (3). Quod &c.

Quare &c.

Theor. 25. *Prop.* 25.

SEries naturales, arithmetica, & harmonica, plures terminos habent, quàm quot quisque dixerit, & cuiusq; numerosæ rationis.

Demonstr.

20. 9. Nam numeri plures sunt, quàm quot quisque
19. *b.* dixerit, secundum quos accepti multiplices ad
20. *b.* primum terminum in serie arithmetica, & submultiplices ad primum in harmonica, sunt plures termini, quàm quot quisque dixerit.

Quod si multiplices accepti fuerint, secundum
21. *b.* numeros numerosæ rationis: erunt in arithmetica serie termini, eamdem numerosam habentes rationem. item si accepti fuerint submultiplices:
24. *b.* erunt in harmonica, termini, eamdem reciprocè numerosam habentes rationem.

Deinde numeri bini, eamdem numerosam habentes rationem, minimi omnium, & minimorum
20. 9. æquemultiplices numeri, secundum plures, quàm quot quisque dixerit numeros, possunt accipi: secun-

sup. cundum quos acceptos binos numeros, termini multiplices in arithmetica, & submultiplices in harmonica, possunt accipi bini plures, quàm quot quisque dixerit, eamdem numerosam habentes rationem.

Quare &c.

Theor. 26. Prop. 26.

IN serie arithmetica naturali ab vnitate, termini sunt, vnitas, & omnes numeri ordinatim accepti,

Demonstr.

Nam in serie arithmetica naturali ab vnitate, omnes termini sunt, ipsa vnitas, & omnes multiplices ad vnitatem, ordinatim accepti: sed numeri sunt multiplices ad vnitatem; & eorum ordo, est idem multiplicium. Quod &c.

19. b.

Quare &c.

Theor. 27. Prop. 27.

IN serie harmonica naturali à rationali, termini sunt, ipsa rationalis, & fractiones, pro communi numeratore, habentes rationalem, & pro denominatoribus, habentes ordinatim omnes numeros.

Demonstr.

Nam in serie harmonica naturali à rationali, termini sunt, ipsa rationalis, & omnes eius submultiplices ordinatim accepti. Sed fractiones, in

20. b.
cf. 29 b

in quibus ipsa rationalis est numerator communis, & omnes numeri sunt denominatores, ipsæ sunt submultiplices ad rationalem; & earum ordo, est idem ordo numerorum, per quos ipsæ submultiplices ordinantur. Ergo &c, Quare &c.

Theor. 28. Prop. 28.

SI fuerint duæ series totidem terminorum; & inter primos, idem fuerit medius proportionalis, qui inter secundos, inter tertios, & deinceps inter æqueordinatos: siquidem in prima serie, sunt quatuor arithmeticè dispositi; in secunda serie, sunt quatuor harmonicè dispositi.

Hypoth.

Sint in prima serie, quatuor arithmeticè ordinati, a, $a+b$, c, $c+b$: sit medius d: & sint in altera serie ordinati $d2\ (a)$, $d2\ (a+b)$, $d2\ (c)$, $d2\ (c+b)$.

Dico $d2\ (a)$, $d2\ (a+b)$, $d2\ (c)$, $d2\ (c+b)$ esse harmonicè dispositos.

Demonstr.

hypoth. Quoniam a ad d, est vt d ad $d2\ (a)$; idest quatuor proportionalium prima quantitas

11. b. est a, secunda & tertia est d: ergo quarta est fractio, cuius numerator, secunda potestas d; denominator, prima quantitas a. Similiter ostendetur quod $d2\ (a+b)$, est secunda potestas d, denominata per $a+b$: & $d2\ (c)$, secunda potestas d, denominata per c: & denique $d2$ $(c+b)$,

$(c+b)$, ſecunda poteſtas d, denominata per $c+b$: Ergo $d2(a)$, $d2(a+b)$, $d2(c)$, $d2(c+b)$, ſunt quatuor fractiones: quarum numerator communis, ſecunda poteſtas d; denominatores verò, ſunt quatuor arithmeticè diſpoſiti, a, $a+b$, c, c
14. *h.* $+d$. Ergo $d2(a)$, $d2(a+b)$, $d2(c)$, $d2(c+b)$, ſunt harmonicè diſpoſitæ. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 29. Propoſ. 29.

Quorum productorum quidam ſunt communes, quidam non communes producentes, aggregatum, eſt productus producentium communium, & aggregati producentium non communium.

Hypoth.

Duorum productorum ab, ac, communis producens eſto a: non communes ſunto b, c; quorum ſumma d.

Dico $ab+ac$: ad.

Demonſtr.

9. *h.*	ab; ac: b; c.
2. *p.*	$ab+ac$; ac: $b+c$; c.
hypoth.	$b+c$: d.
7. 5.	$ab+ac$; ac: d; c.
9. *h.*	ad; ac: d; c.
11. 5.	$ab+ac$; ac: ad; ac.
9. 5.	$ab+ac$: ad. Quod &c. Quarè &c.

Theor. 30. Prop. 30.

QVorum productorum quidam sunt communes, quidam non communes, & inæquales producentes, differentia, est productus producentis communis, & differentiæ producentium non communium.

Hypoth.

Duorum productorum *ab*, *ac*, communis producens esto *a*, non communes sunto *b*, *c*: & esto *b* maior, quàm *c*; quorum differentia *d*.

Dico *ab*---*ac*: *ad*.

Demonstr.

9. b.	*ab*; *ac*: *b*; *c*.
2. p.	*ab*---*ac*; *ac*: *b*---*c*; *c*.
hypoth.	*b*---*c*: *d*.
7. 5.	*ab*---*ac*; *ac*: *d*; *c*.
9. b.	*ad*; *ac*: *d*; *c*.
11. 5.	*ab*---*ac*: *ad*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 31. Prop. 31.

QVatuor proportionalium productus extremorum, est æqualis producto mediorum.

Hypoth.

Sunto proportionales *a*; *b*: *c*; *d*.

Dico *ad*: *bc*.

Præpar.

Assumatur productus alternorum *ac*.

 De-

Demonstr.

9. *h.*	*ac*; *ad*: *c*; *d*.
9. *h.*	*ac*; *bc*: *a*; *b*.
hypoth.	*a*; *b*: *c*; *d*.
11. 5.	*ac*; *ad*: *ac*; *bc*.
9. 5.	*ad*: *bc*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 32. Prop. 32.

QVatuor termini, quorum extremorum productus est æqualis producto mediorum, sunt proportionales.

Hypoth.

Quatuor terminorum *a*, *b*, *c*, *d*, productus extremorum *ad*, & productus mediorum *bc*, sunt æquales.

Dico *a*; *b*: *c*; *d*.

Præpar.

Assumatur productus alternorum *ac*.

Demonstr.

7. 5.	*ac*; *bc*: *ac*; *ad*.
9. *h.*	*ac*; *bc*: *a*; *b*.
9. *h.*	*ac*; *ad*: *c*; *d*.
11. 5.	*a*; *b*: *c*; *d*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 33. Prop. 33.

SI fuerint duæ series totidem terminorum; & inter primos idem fuerit medius proportionalis, qui inter secun-

cundos, inter tertios, & deinceps inter æqueordinatos: siquidem in prima ſerie, ſunt quatuor harmonicè diſpoſiti; in ſecunda ſerie, ſunt quatuor arithmeticè diſpoſiti.

Hypoth.

Sint in prima ſerie quatuor harmonicè ordinati *a*, *b*, *c*, *d*: & ſit medius *e*: & ſint in altera ſerie ordinati *e2 (a)*, *e2 (b)*, *e2 (c)*, *e2 (d)*.

Dico *e2 (a)*, *e2 (b)*, *e2 (c)*, *e2 (d)*, eſſe arithmeticè diſpoſitos.

Demonſtr.

def.13.b	*a---b; c---d: a; c,+b; d.*
8. b.	*ab; cd: a; c,+b; d.*
11. 5.	*a---b; c---d: ab; cd.*
30. & 31.b.	*acd---bcd: abc---abd.*
	adhibito communi producente *e2.*
9. b.	*e2acd---e2bcd: e2abc---e2abd.*
	communiter denominando per *abcd.*
10.&13. b.	*e2 (b)---e2 (a): e2 (d)---e2 (c).*
def.5.b.	*e2 (a)*, *e2 (b)*, *e2 (c)*, *e2 (d)*, ſunt arithmeticè diſpoſiti. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 34. Prop. 34.

QVatuor termini harmonicè diſpoſiti, permutando, ſunt harmonicè diſpoſiti.

Hypoth.

Sint quatuor termini *a*, *b*, *c*, *d*, harmonicè diſpoſiti.

Dico permutando *a, c, b, d* esse harmonicè dispositos.

Præpar.

Assumatur quælibet quantitas *e*, & fiat

a; *e*: *e*; *f*.
b; *e*: *e*; *g*.
c; *e*: *e*; *h*.
d; *e*: *e*; *l*.

Demonstr.

hypoth.	*a, b, c, d* sunt harmonicè dispositi.
33. *h.*	*f, g, h, l* sunt arithmeticè dispositi.
4. *h.*	*f, h, g, l* sunt arithmeticè dispositi.
28. *h.*	*a, c, b, d* sunt harmonicè dispositi. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 35. Prop. 35.

SI fuerint aliquot quantitates in una serie, similiter harmonicæ dispositæ, atque aliæ totidem, in altera: erunt ex æqualitate harmonica, prima & vltima, in vna serie, item prima & vltima, in altera, dispositæ harmonicè.

Hypoth.

Sint *a, b, c* similiter harmonicè dispositæ, atque aliæ totidem *d, e, f*.

Dico ex æqualitate harmonica, esse dispositas harmonicè, *a, c,* & *d, f*.

Præpar.

Assumatur quælibet quantitas *g*. & fiat

a; *g*;

a; *g*: *g*; *h*
b; *g*: *g*; *k*
c; *g*: *g*; *l*
d; *g*: *g*; *m*
e; *g*: *g*; *n*
f; *g*: *g*; *o*.

Demonstr.

def.16b	*a*, *b*, *d*, *e* ſunt harmonicè diſpoſitæ.
33. b.	*h*, *k*, *m*, *n* ſunt arithmeticè diſpoſitæ.
def.16b	*b*, *c*, *e*, *f* ſunt harmonicè diſpoſitæ.
33. b.	*k*, *l*, *n*, *o* ſunt arithmeticè diſpoſitæ.
def.8.b.	*h*, *k*, *l* ſunt ſimiliter arithmeticè diſpoſitæ, atque *m*, *n*, *o*.
5. b.	*h*, *l*, *m*, *o* ſunt arithmeticè diſpoſitæ.
28. b.	*a*, *c*, *d*, *f* ſunt harmonicè diſpoſitæ. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 36. Prop. 36.

HArmonicè diſpoſitarum ęqueſubmultiplices, ſunt harmonicè diſpoſitæ.

Hypoth.

Sint harmonicè diſpoſitæ *a*, *b*, *c*, *d*: quarum æque ſubmultiplices *a*(3), *b*(3), *c*(3), *d*(3).

Dico *a*(3), *b*(3), *c*(3), *d*(3) eſſe harmonicè diſpoſitas.

Præpar.

Aſſumatur quælibet quantitas *e*. & fiat

a; *e*:

$a;\ e:\ e;\ f$
$b;\ e:\ e;\ g$
$c;\ e:\ e;\ h:$
$d;\ e:\ e;\ l.$

Et quotuplices sunt a, b, c, d ad $a(3), b(3), c(3), d(3)$, totuplices accipiantur ipsarum f, g, h, l, quæ quæ sint $3f, 3g, 3h, 3l$.

Demonstr.

hypoth.	a, b, c, d, sunt harmonicè dispositæ,
33. h.	f, g, h, l, sunt arithmeticè disposite.
6. h.	$3f, 3g, 3h, 3l$, sunt arithmeticè dispositæ.
præpar.	$a(3);\ a:\ f;\ 3f.$
præpar.	$a;\ e:\ e;\ f.$
p. p.	$a(3);\ e:\ e;\ 3f.$
sup.	$b(3);\ e:\ e;\ 3g.$
sup.	$c(3);\ e:\ e;\ 3h.$
sup.	$d(3);\ e:\ e;\ 3l.$
28. h.	$a(3), b(3), c(3), d(3)$ sunt harmonicè dispositæ. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 37. Prop. 37.

SI fuerint aliquot primæ quãtitates, arithmeticè similiter dispositæ, atque aliæ totidem secundæ, vtræque in vna serie: fuerint autem & aliæ totidem quantitates primę, aliæque totidem secundæ in altera: & fuerit vna eadem quantitas media proportionalis inter primas primarum, & in-

& inter ſecundas primarum, & deinceps inter æqueordinatas; item inter primas ſecundarum, & inter ſecundas, & deinceps inter æqueordinatas: erunt in ſecunda ſerie primæ ſimiliter harmonicè ordinatæ, atque ſecundæ.

Demonſtr.

Quoniam enim primarum in prima ſerie prima, & ſecunda; & ſecundarum in prima ſerie prima, & ſecunda, ſunt arithmeticè diſpoſitæ: conſtat, quod etiam in ſecunda ſerie primarum prima, & ſecunda; & ſecundarum prima, & ſecunda, ſunt harmonicè diſpoſitę. conſtat ſimiliter, quod in ſecunda ſerie, primarum ſecunda, & tertia; & ſecundarum ſecunda, & tertia ſunt harmonicè diſpoſitæ. Et ita deinceps vſque ad vltimas primarum, & ſecundarum. Quare primæ in ſecunda ſerie, ſunt ſimiliter harmonicè ordinatę, atque ſecundæ.

def. 8. h. *28. h.* *def. 16. h*

Theor. 38. Prop. 38.

SI fuerint aliquot primæ quantitates harmonicè ſimiliter diſpoſitæ, atque aliæ totidem ſecundæ, vtræque in vna ſerie: fuerint autem & aliæ totidem quantitates primę, aliæque totidem ſecundæ, in altera ſerie: & fuerit vna eadem quantitas media proportionalis inter primas primarum, & inter ſecundas primarum, & deinceps inter æqueordinatas; necnon media proportionalis inter primas ſecundarum, & inter ſecundas ſecundarum, & dein-

ceps

ceps inter æquecordinatas: erunt in altera ſerie, primæ ſimiliter arithmeticè diſpoſitæ, atque ſecundæ.

Demonſt.

def.16b Quoniam enim primarum in prima ſerie, prima & ſecunda, & ſecundarum in prima ſerie, prima & ſecunda, ſunt harmonicè diſpoſitæ: conſtat,
33. b. quod & in ſecunda ſerie, primarum prima & ſecunda, & ſecundarum prima & ſecunda, ſunt arithmeticè diſpoſitæ. item oſtendetur, quod primarum in ſecunda ſerie ſecunda, & tertia, & ſecundarum ſecunda & tertia, ſunt arithmeticè diſpoſitæ. & ſic deinceps vſque ad vltimas primarum,
def.8.b. & ſecundarum. Quare primæ in ſecunda ſerie, ſunt ſimiliter arithmeticè diſpoſitæ, atque ſecũdę.

Theor. 39. Prop. 39.

INter duas quantitates media proportionalis, eadem eſt etiam inter ſubmultiplicem vnius, & æquemultiplicem alterius.

Hypoth.

Eſto inter duas *a*, *b*, media proportionales *c*: & eſto ipſius *a*, ſubmultiplex *a*(3); & ipſius *b*, æquemultiplex 3*b*.

Dico *a*(3); *c*: *c*; 3*b*.

Demonſtr.

hypoth. *a*(3); *a*: *b*; 3*b*.
hypoth. *a*; *c*: *c*; *b*.
p. p. *a*(3); *c*: *c*; 3*b*. Quod &c. Quare &c.

Theor. 40. *Prop.* 40.

IN ſerie harmonica naturali, aliquoteni ab vno, & aliquoteni ab altero, per numeros alterutrorum multitudinis terminorum ſubmultiplicati; ſicut primi quotientes, ſimiliter ſecundi, ſunt harmonicè diſpoſiti: item tertij, & quarti, & ſic deinceps.

Hypoth.

Sint in ſerie harmonica naturali duo termini *a*, *b*: & ab *a*, ſumantur terni ſubquadrupli; & à *b*, quaterni ſubtripli.

Dico primos ternos ſubquadruplos ab *a*, & primos ſubtriplos à *b*, ſimiliter eſſe diſpoſitos harmonicè; atque ſecundos ſubquadruplos ternos ab *a*, & ſecundos ſubtriplos quaternos à *b*.

Præpar.

Ordinetur ſeries arithmetica naturalis: in qua ſint, *c* æqueordinatus, atque *a*; & *d* æqueordinatus, atque *b*. ſumanturque quadrupli terni à *c*, & tripli quaterni à *d*. ſumatur etiam inter *a*, & *c* medius proportionalis *e*.

Demonſtr.

conſtr. Quoniam *e*, medius proportionalis eſt inter *a*, *c*: medius etiam proportionalis eſt inter *b*, *d*; &
23. *h.* inter æqueordinatos terminos in vtraque ſerie na-
39. *h.* turali arithmetica, & harmonica. item eſt medius proportionalis inter multiplices terminorum arithmeticæ ſeriei naturalis, & inter æqueſubmulti-
7. *h.* plices terminorum harmonicæ. ſed quadrupli terni à *c*, & tripli quaterni à *d*, primi, ſunt ſimiliter

arithmeticè dispositi, atque secundi; item, atque
37. b. tertij, atque quarti, & deinceps. Ergo etiam subquadrupli terni ab a, & subtripli quaterni à b, primi, sunt similiter harmonicè dispositi, atque secundi; item, atque tertij, atque quarti, & deinceps. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 41. Propos. 41.

SVmma fractionum communem habentium denominatorem, est summa numeratorum, ab eodem denominatore denominata.

Hypoth.

Fractiones $a(b)$, $c(b)$ communem habent denominatorem: numeratorum summa est $a+c$.

Dico $a(b)+c(b):\ a+c(b)$.

Demonstr.

10. b. $a(b);\ c(b):\ a;\ c.$
2. p. $a(b)+c(b);\ c(b):\ a+c;\ c.$
10. b. $a+c(b);\ c(b):\ a+c;\ c.$
11. 5. $a(b)+c(b);\ c(b):\ a+c(b);\ c(b).$
9. 5. $a(b)+c(b):\ a+c(b)$. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 42. Prop. 42.

DIfferentia fractionum communem habentium denominatorem, est differentia numeratorum, ab eodem

dem

dem denominatore denominata.

Hypoth.

Fractiones $a(b)$, $c(b)$, communem habent denominatorem b: differentia numeratorum est $a - c$.

Dico $a(b) - c(b)$: $a - c(b)$.

Demonstr.

10. *h.* | $a(b)$; $c(b)$: a; c.
2. *p.* | $a(b) - c(b)$; $c(b)$: $a - c$; c.
10. *h.* | $a - c(b)$; $c(b)$: $a - c$; c.
11. 5. | $a(b) - c(b)$; $c(b)$: $a - c(b)$; $c(b)$.
9. 5. | $a(b) - c(b)$: $a - c(b)$. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 43. *Prop.* 43.

DVorum inæqualium numerorum, vnitas denominata à minore, & differentia denominata à maiore, sunt fractiores duæ, quarum summa est maior, quàm differentia eorumdem, aucta vnitate, denominata à maiore.

Hypoth.

Sunto duo inæquales numeri, minor a, maior $a+b$.

Dico $1\ (a) + b\ (a+b)$: maiorem esse, quàm $b + 1\ (a+b)$.

Demonstr.

12. *h.* | $1\ (a)$; $1\ (a+b)$: $a+b$; a.
| $1\ (a)$: maior quàm $1\ (a+b)$.
| communiter addatur $b\ (a+b)$.
41. *h.* | $1\ (a) + b\ (a+b)$: maior est, quàm $b + 1\ (a+b)$.
| Quod &c. Quare &c.

Theor. 44. *Prop.* 44.

QValibet quantitate, à se ipsa, & à suis deinceps per ordinem multiplicibus, denominata; fit series harmonica naturalis.

Hypoth.

Esto quælibet quantitas a, eiusque multiplices $2a$, $3a$, $4a$, & deinceps.

Dico $a(a)$, $a(2a)$, $a(3a)$, $a(4a)$, & deinceps esse seriem harmonicam naturalem.

Præpar.

Esto rationalis u: & à rationali ordinetur series harmonica naturalis u, $u(2)$, $u(3)$, $u(4)$, & deinceps.

Demonstr.

def.29h	$a;\ u:\ a;\ a(a)$.
9. 5.	$u:\ a(a)$.
12. *h.*	$a(a);\ a(2a):\ 2a;\ a:\ u;\ u(2)$ dupla.
9. 5.	$a(2a):\ u(2)$.
sup.	$a(3a):\ u(3)$.
sup.	$a(4a):\ u(4)$.
def.20h	$a(a)$, $a(2a)$, $a(3a)$, $a(4a)$, est series harmonica naturalis. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 45. *Prop.* 45.

SI fuerint duo prologarithmi, ex terminis ab vnitate; alter, ex quotcunque terminis; alter, ex totidem, & vno amplius: erit qui ex pluribus, eo qui ex paucioribus, perspectè maior. *Hy-*

Hypoth.

Sunto duo prologarithmi, ex terminis ab vnitate: alter *A*, ex tot terminis, quotus eſt numerus *b*: alter *C*, ex tot, quotus eſt *d*. & eſto *d*, vnitate maior, quàm *b*.

Dico *C*, perſpectè maiorem eſſe, quàm *A*.

Præpar.

l *m* *n*

e . . . . *k*

f *g* *h* *i*

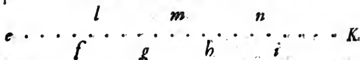
Sumatur numerus *b* toties, quotus eſt *d*: & ſint ſumpti numeri *ef*, *fg*, *gh*, *hi*, *ik*. Item ſumatur numerus *d* toties, quotus eſt *b*: & ſint ſumpti *el*, *lm*, *mn*, *nk*.

Demonſtr.

16. 7. Quoniam productus *b* per *d*, eſt æqualis producto *d* per *b*: ſumma numerorum *ef*, *fg*, *gh*, *hi*, *ik*, eſt æqualis ſummæ numerorum *el*, *lm*, *mn*, *nk*, eſtque idem numerus *e*k. Et quoniam *ef*, *fg*, *gh*, *hi*, *i*k, ſunt æquales inter ſe: ergo *ef*, *eg*, *eh*, *ei*, *e*k, ſunt ſimplex *b*, duplex, triplex, & reliqui deinceps multiplices. Item quoniam *el*, *lm*, *mn*, *n*k, ſunt æquales: ergo *el*, *em*, *en*, *e*k, ſunt ſimplex *d*, duplex, triplex, & reliqui deinceps multiplices.

Deinde quoniam *d*, vnitate maior eſt, quàm *b*: ergo 2*d*, binario maior eſt, quàm 2*b*: & 3*d*, ternario maior eſt, quàm 3*b*: & ſic deinceps, & ſimiliter *el*, vnitate maior, quàm *ef*: & *em*, binario maior, quàm *eg*: & *en*, ternario

maior,



maior quàm *eh*: & sic deinceps. item similiter *nk*, vnitate maior, quàm *ik*: & *mk*, binario maior, quàm *hk*: & *lk*, ternario maior, quàm *gk*. Quare *fl*, *gm*, *hn*, & deinceps, sunt vnitas, binarius, ternarius, & deinceps: item *in*, *hm*, *gl*, sunt vnitas, binarius, ternarius, & deinceps. Est ergo *ef*, vnitate maior, quàm *lg*; & *lg*, vnitate maior, quàm *mh*; & *mh*, vnitate maior, quàm *ni*; & *ni*, est vnitas.

Cum itaque tres sint quantitates inæquales *ef*, *el*, *eg*, quarum *ef* minima, *el* media, *eg* ma-

3. h. xima. si *lg*, vnitate aucta, denominetur ab *ef*; & *fl*, ab *eg*: fiunt duæ fractiones, quarum summa, maior est, quàm *fg* vnitate aucta, denominata ab *el*. Sed *lg*, vnitate aucta, est *ef*; & *fg*, vnitate aucta, est *el*: ergo

ef (*ef*) + *fl* (*eg*): maior est, quàm *el* (*el*).

Similiter ostendetur,

lg (*eg*) + *gm* (*eh*): maior, quàm *lm* (*em*).

Et *ml* (*eh*) + *hn* (*ei*): maior, quàm *mn* (*en*).

Deinde, cum duo sint inæquales numeri, *ei*,

43. h. *ek*; quorum minor *ei*, maior *ek*, differentia *ik*: sitque vnitas *ni*: & differentia *ik*, vnitate aucta, sit *nk*. ergo

ni (*ei*) + *iK* (*eK*): maior est, quàm *nK* (*eK*.

44. h. Sed *ef* (*ef*), *fl*+*lg* (*eg*), *gm*+*mh* (*eh*), *hn*+*ni* (*ei*),

(ei), $iK(eK)$ ſunt termini componentes prologarithmum C. nam ef, $fl+lg$, $gm+mh$, $hn+ni$, iK, ſunt numeratores æquales ipſi b, quos denominant, ef, eg, eh, ei, eK, nempe ſimplex b, duplex, triplex, & deinceps multiplices.

Eadem ratione conſtat, quod $el(el)$, $lm(em)$, $mn(en)$, $nK(eK)$ ſunt termini componentes prologarithmum A.

def 26b Ergo C, peſpectè maior eſt, quàm A. Quod &c. Quare &c.

Theor. 46. Prop. 46.

SI duorum inæqualium numerorum differentia, denominetur à minore; vnitas verò, à maiore: fiunt duæ fractiones; quarum ſumma, minor eſt, quàm differentia, vnitate aucta, denominata à minore.

Hypoth.

Sunto duo inæquales numeri a, $a+b$.

Dico $b(a)+1(a+b)$: minorem eſſe, quàm $b+1(a)$.

Demonſtr.

12. b. $1(a+b)$; $1(a)$: a; $a+b$.

$1(a+b)$: minor, quàm $1(a)$.

addito communi $b(a)$.

41. b. $b(a)+1(a+b)$: minor, quàm $b+1(a)$. Quod &c.

Quare &c.

Theo-

Theor. 47. Prop. 47.

SI fuerint prologarithmi ex duobus terminis à ſecundo, ex tribus à tertio, ex quatuor à quarto, & ſic deinceps: qui ex pluribus, perſpectè minor eſt, quàm, qui ex paucioribus vno.

Hypoth.

Sint duo prologarithmi; alter *A*, ex terminis ab 1(*b*); & ex tot terminis, quotus eſt *b*; alter *C*, ex terminis ab 1(*d*), & ex tot terminis, quotus eſt *d*: & eſto *b*, vnitate minor, quàm *d*.

Conſtat, quod 1(*b*), totus ordine eſt, quotus, eſt *b*: & 1(*d*), totus ordine, quotus eſt *d*. *prop.* 27. *h.*

Dico *C*, perſpectè minorem eſſe, quàm *A*.

Præpar.

m *n* *o*
e---20---*f*. . . . . *l*
g *h* *i* *k*

Sumatur productus *bd*, qui ſit *ef*: eique adijciantur tot *b*, quotus eſt *d*, qui ſint *fg*, *gh*, *hi*, *ik*, *kl*: eidemque *ef*, tot *d* adijciantur, quotus eſt *b*, qui ſint *fm*, *mn*, *no*, *ol*.

Demonſtr.

16. 7. Quoniam productus *b* per *d*, & productus *d* per *b*, ſunt æquales: ſumma numerorum *fg*, *gh*, *hi*, *ik*, *kl*, ſummæ *fm*, *mn*, *no*, *ol*, eſt æqualis: eſtque idem numerus *fl*. Et quoniam *fg*, *gh*, *hi*, *iK*, *Kl*, ſunt æquales: ergo *fg*, *fh*, *fi*, *fK*, *fl*, ſunt ſimplex *b*, duplex, triplex, & reliqui deinceps

inceps multiplices. Item quoniam *fm*, *mn*, *no*, *ol*, ſunt æquales: ergo *fm*, *fn*, *fo*, *fl*, ſunt ſimplex *d*, duplex, triplex, & reliqui deinceps multiplices. Sed *ef*, ad *b* totuplex eſt, quotus eſt $d+1$: & *eh*, quotus eſt $d+2$: ideoque *ef*, *eg*, *eh*, *ei*, *eK*, ſunt totuplices ad *b*, quoti ſunt *d*, $d+1$, $d+2$, $d+3$, $d+4$. Item cum ſit *ef*, ad *d* totuplex, quotus eſt *b*: erunt *ef*, *em*, *en*, *eo*, totuplices ad *d*, quoti ſunt *b*, $b+1$, $b+2$, $b+3$.

Deinde quoniam *d*, vnitate maior eſt, quàm *b*: ergo $2d$, binario maior eſt, quàm $2b$: & $3d$, ternario maior, quàm $3b$; & ſic deinceps, & ſimiliter *fm*, vnitate maior, quàm *fg*; & *fn*, binario maior, quàm *fh*; & *fo*, ternario maior, quàm *fi*; & ſic deinceps. item ſimiliter *ol*, vnitate maior, quàm *Kl*; & *nl*, binario maior, quàm *il*; & *ml*; ternario maior, quàm *hl*. Quare *gm*, *hn*, *io*, ſunt vnitas, binarius, ternarius, & deinceps: item *oK*, *ni*, *mh*, ſunt vnitas, binarius, ternarius, & deinceps. Ergo *gm*, auctus vnitate, eſt *hn*; & *hn*, auctus vnitate, eſt *io*; & *io*, auctus vnitate, eſt *iK*, vel *b*.

Itaque ſunt inæquales, & minores primùm, deinde maiores hoc ordine, *ef*, *eg*, *em*, *eh*, *en*, *ei*, *eo*, *eK*: quorum minimus *ef*, eſt productus *bd*: & differentia *ef*, *eg*, eſt *fg*, nempe *b*: eſt
9. b. autem *bd* ad $b2$, ſicut *d* ad *b*, maior: ergo minimus *ef*, non eſt minor, quàm ſecunda poteſtas differentiæ *ef*, *eg*. ideoque neque *eg*, minor eſt, quàm ſecunda poteſtas differentiæ *eg*, *eh*.

m n o
e—20—f. l
g h i K

neque *eh*, minor, quàm ſecunda poteſtas differentiæ *eh*, *ei*. neque *ei*, minor, quàm ſecunda poteſtas differentiæ *ei*, *ek*.

Quare ſi *fg*, denominetur ab *ef*; & vnitas *gm*,
46. b. denominetur ab *eg*: ſumma fractionum, minor eſt, quàm ſi *fg*, aucta vnitate, denominetur ab *ef*. eſt autem *fg*, aucta vnitate, æqualis ipſi *fm*: ergo

fg (*ef*)+*gm* (*eg*): minor eſt, quàm *fm* (*ef*).

2. b. Item ſi *mh* denominetur ab *eg*; & *gm*, aucta vnitate, ideſt *hn* denominetur ab *eh*: ſumma fractionum, minor eſt, quàm ſi *gh*, aucta vnitate, ideſt *mn*, denominetur ab *eh*.

mh (*eg*)+*hn* (*eh*): minor eſt, quàm *mn* (*eh*).

Similiter oſtendetur, quod

ni (*eh*)+*io* (*ei*): minor eſt, quàm *no* (*en*).

Et quòd

oK (*ei*)+*Kl* (*eK*): minor eſt, quàm *ol* (*eo*).

Sed *fg* (*ef*), *gm*+*mh* (*eg*), *hn*+*ni* (*eh*), *io*+*oK*-(*ei*), *Kl* (*eK*), ſunt 1(*d*), 1(*d*+1), 1(*d*+2), & deinceps reliqui termini, tot, quotus eſt *d*, componentes prologarithmum *C*. nam *fg*, eſt *b*: & *ef*, eſt productus *bd*: & *fg* (*ef*), eſt *b* (*bd*); ideſt, 1(*d*).
13. b. item *gm*+*mh* eſt *b*: & *eg*, eſt *bd*+*b*: & *gm*+*mh*-(*eg*), eſt *b* (*bd*+*b*); ideſt, 1(*d*+1). & ſic deinceps.

Simi-

13. b. Similiter $fm(ef)$, $mn(em)$, $no(en)$, $ol(eo)$, sunt $1(b)$, $1(b+1)$, & deinceps reliqui termini, tot, quotus est b, componentes prologarithmum A. nam fm, mn, no, ol, sunt d: & ef, em, en, eo, sunt bd, $bd+d$, $bd+2d$, $bd+3d$, & ipsę fractiones
13. b. sunt $d(bd)$, $d(bd+d)$, $d(bd+2d)$, $d(bd+3d)$; id est, $1(b)$, $1(b+1)$. &c.
def. 27 b Ergo C, est perspectè minor, quàm A. Quod &c. Quare &c.

Theor. 48. *Prop.* 48.

SI fuerint duæ series prologarithmorum, ex terminis ab vnitate; altera, ex quotcunque terminis; altera, ex totidem, & vno amplius: erit secundus prologarithmus ex pluribus, secundo ex paucioribus, perspectè maior: & tertius, tertio: & quartus, quarto: & sic deinceps singuli prologarithmi vnius seriei, singulis prologarithmis æqueordinatis alterius, perspectè sunt maiores.

Hypoth.

Sint duę series prologarithmorum ex terminis ab vnitate: altera A, ex tot terminis, quotus est numerus b: altera C, ex tot, quotus est d. & esto d, vnitate maior, quàm b.

Dico secundum prologarithmum seriei C, perspectè maiorem esse, secundo seriei A.

Præpar.

l m n t u x
e . . . . K . . . . s
f g h i o p q r

Sumatur numerus *b* toties, quotus eſt *d:* & ſint ſumpti numeri *ef, fg, gh, hi, iK.* item numerus *d* toties, quotus eſt *b*: & ſint ſumpti numeri *el, lm, mn, nK.* Sumatur iterum *b* toties, quotus eſt *d:* & ſint ſumpti numeri *Ko, op, pq, qr, rs.* & iterum *d*, ſumatur toties, quotus eſt *b*: & ſint ſumpti numeri *Kt, tu, ux, xs.*

Demonſtr.

16. 7. Quoniam productus *b* per *d*, eſt æqualis producto *d* per *b:* ſumma numerorum *ef, fg, gh, hi, iK*, ſummæ numerorum *el, lm, mn, nK*, eſt æqualis: & ſumma numerorum *Ko, op, pq, qr, rs*, ſummæ *Kt, tu, ux, xs*, eſt æqualis. Sunt autem & ſingulæ partes *ek*, ſingulis *Ks* partibus æquales; & omnes, omnibus: & *ef, el, eg, em, eh, en, ei, ek*, ipſis ko, kt, kp, ku, kq, kx, kr, ks; ſinguli numeri, ſingulis ęquales; & eorum dif-
def. 8. b. ferentiæ æquales, & ſimiles: atque omnes ordinatim accepti, vt ſupra, vſque ad *k*, ſimiliter arithmeticè ſunt diſpoſiti, atque omnes reliqui, vſque ad
45. b. *s.* Et ſicut demonſtratum eſt, quòd
3. b. *ef (ef)+fl (eg)*: maior eſt, quàm *el (el).*
3. b. *lg (eg)+gm (eh)*: maior, quàm *lm (em).*
3. b. *mh (eh)+hn (ei)*: maior, quàm *mn (en).*

ni-

43. h. $ni(ei)+ik(ek)$: maior, quàm $nk\ (ek)$.
ita in præsenti demonstrabitur, eodem prorsus argumento, quòd
3. h. $ko\ (eo)+ot\ (ep)$: maior est, quàm $kt\ (et)$.
3. h. $tp\ (ep)+pu\ (eq$: maior, quàm $tu\ (eu)$.
3. h. $uq(eq)+qx\ (er)$: maior, quàm $ux\ (ex)$.
43. h. $xr\ (er)+rs\ (es)$: maior, quàm $xs\ (es)$.
45. h. Item sicut demonstratum est, quòd
$ef(ef)$, $fl+lg\ (eg)$, $gm+mh(eh)$, $hn+ni\ (ei)$, $ik\ (ek)$, sunt termini componentes primum prologarithmum seriei *C*: & quòd $el(el)$, $hm(em)$, $mn\ (en)$, $nK\ (eK)$, sunt componentes primum seriei *A*. ita demonstrabitur in præsenti, quòd
$Ko(eo)$, $ot+tp\ (ep)$, $pu+uq\ (eq)$, $qx+xr\ (er)$, $rs\ (es)$, sunt termini componentes prologarithmum secundum seriei *C*: & quòd $Kt\ (et)$, $tu\ (eu)$, $ux\ (ex)$, $xs\ (es)$, sunt componentes secundum prologarithmum seriei *A*.
45. h. Et omninò sicut ostensum est, quòd primus seriei *C*, est perspectè maior, primo seriei *A*: ita
def.8.h. demonstrabitur, quòd secundus seriei *C*, est perspectè maior secundo seriei *A*. Quod &c.

Similiter ostendetur, quòd & tertius tertio, & quartus quarto, sunt perspectè maiores: & quòd quisque prologarithmus seriei *C*, perspectè maior est, æqueordinato prologarithmo seriei *A*.

Quare &c.

Theor. 49. *Prop.* 49.

SI fuerint ſeries prologarithmorum, ex binis à ſecundo, ex ternis à tertio, ex quaternis à quarto, & ſic deinceps: ſecundus prologarithmus eius, quę ex pluribus, perſpectè minor eſt, quàm ſecundus eius, quæ ex paucioribus vno: & tertius, perſpectè minor, quàm tertius: & quartus, quàm quartus: & ſic deinceps vnuſquiſque perſpectè eſt minor, quàm ſuus æqucordinatus prologarithmus.

Hypoth.

Sint duæ ſeries prologarithmorum: altera *A*, ex terminis ab 1(*b*), & ex totenis, quotus eſt *b*: altera *C*, ex terminis ab 1(*d*), & ex totenis, quotus eſt *d*. & eſto *b*, vnitate minor, quàm *d*.

Conſtat, quòd 1(*b*) totus eſt ordine, quotus *b*: & 1(*d*), totus ordine, quotus *d*. *prop.* 27. *h.*

Dico ſecundum prologarithmum ſeriei *C*, perſpectè minorem eſſe, ſecundo ſeriei *A*.

Præpar.

m n o q s u
e---20---f.... . ...l.... . ...y
g h i K p r t x

Sumatur productus *bd*, qui ſit *ef*: eique adijciantur tot *b*, quotus eſt *d*, qui ſint *fg*, *gh*, *hi*, *iK*, *Kl*: eidemque *ef*, tot *d* adijciantur, quotus eſt *b*, qui ſint *fm*, *mn*, *no*, *ol*, & iterum ipſi *el*, adijciantur tot *b*, quotus eſt *d*, qui ſint *lp*, *pr*, *rt*, *tx*, *xy*: necnon iterum eidem *el*, adijciantur tot

d,

d, quotus eſt *b*, qui ſint *lq, qs, su, uy.*

Demonſtr.

16. 7. Quoniam productus *b* per *d*, eſt æqualis producto *d* per *b*: ſumma numerorum *fg, gh, hi, iK, Kl,* ſummæ *fm, mn, no, ol,* eſt æqualis: & ſumma *lp, pr, rt, tx, xy,* ſummæ *lq, qs, su, uy,* æqualis. Sunt autem & ſingulæ partes *fl,* ſingulis *ly* partibus æquales; & omnes, omnibus: & *fg, fm, fh, fn, fi, fo, fK,* ipſis *lp, lq, lr, ls, lt, lu, lx,* ſinguli numeri, ſingulis æquales: & eorum differentiæ æquales, & ſimiles: additiſque vtrimq; communibus numeris *ef, el,* etiam compoſitorum

def.8.h. differentiæ ſunt æquales & ſimiles: & *ef, eg, em, eh, en, ei, eo, eK,* ſunt ſimiliter arithmeticè diſpoſiti, atque *el, ep, eq, er, es, et, eu, ex.*

47. h. Eſt autem *ef,* non minor, quàm ſecunda poteſtas *fg,* & eſt *el,* maior, quàm *ef*; & *lp* æqualis ipſi *fg*: ergo *el* non minor eſt, quàm ſecunda poteſtas *lp*: ideoque ſimiliter etiam *ep,* non minor, quàm ſecunda poteſtas *pr*: & *er,* non minor, quàm ſecunda poteſtas *rt*: & *et,* non minor, quàm ſecun-

47. h. da poteſtas *tx.* Itaque ſicut demonſtratum eſt, quod

46. h. *fg* (*ef*)+*gm* (*eg*): minor eſt, quàm *fm* (*ef*).

2. h. *mh* (*eg*)+*hn* (*eh*): minor, quàm *mn* (*eh*).

2. h. *ni* (*eh*)+*io* (*ei*): minor, quàm *no* (*en*).

2. h. *oK* (*ei*)+*Kl* (*eK*): minor, quàm *ol* (*eo*).

Sic

m n o q s u
c--20--f........................l...............................y
g h i K p r t x

Sic demonstrabitur, quòd
46. h. *lp(el)+pq(ep)* minor est, quàm *lq(el)*.
2. h. *qr(ep)+rs(er)* minor, quàm *qs(eq)*.
2. h. *st(er)+tu(et)* minor, quàm *su(es)*.
2. h. *ux(et)+xy(ex)* minor, quàm *uy(eu)*.
47. h. Item sicut demonstratum est, quòd
fg(ef), gm+mh(eg), hn+ni(eh), io+ok(ei), Kl(ek).
componunt primum prologarithmum seriei *C*: & quòd
fm(ef), mn(em), no(en), ol(eo), componunt primum seriei *A*. sic
lp(el), pq+qr(ep), rs+st(er), tu+ux(et), xy(ex), componunt secũdum prologarithmum seriei *C*: &
lq(el), qs(eq), su(es), uy(eu), componunt se-
47. h. cundum seriei *A*. Et omninò sicut primus seriei
def.8.h. *C*, perspectè est minor primo seriei *A*: ita secundus prologarithmus, est perspectè minor secundo. Quod &c.

Similiter ostendetur, quod & tertius tertio, & quartus quarto, sunt perspectè minores: & quod quisque prologarithmus seriei *C*; pespectè minor est, æqueordinato prologarithmo seriei *A*.

Quare &c.

Theor. 50. Prop. 50.

HYperlogarithmi rationum duplę, & superparticularium, quò sunt, minores inter terminos, eò sunt minores.

Præpar.

Esto *A*, series harmonica naturalis: & ordinentur *B*, *C*, *D*, series prologarithmorum; *B* quidem, ex binis à secundo; *C*, ex ternis à tertio; *D*, ex quaternis à quarto; & sic deinceps, à quotoquolibet, ex totenis.

Demonstr.

def. 12. h Nam in serie arithmetica naturali, ratio subdupla, est inter minimos terminos, primum, & secundum; *21. 7.* deinde inter maiores, ordinatim multiplos *19. h.* minimorum; videlicet inter secundum, & quartum; inter tertium, & sextum; inter quartum, *24. h.* octauum. Ergo reciprocè, in serie harmonica na- *def. 20 h* turali, ratio dupla, est inter maximos terminos, primum, & secundum; deinde inter minores ordinatim submultiplos maximorum; videlicet inter secundum, & quartum; inter tertium, & sextum; *def. 22 h* inter quartum, & octauum. Ergo rationis duplę, inter maximos terminos primum, & secundum, hyperlogarithmus, est primus terminus seriei *A*, nempe vnitas. deinde inter minores terminos secundum, & quartum, hyperlogarithmus, est primus prologarithmus seriei *B*, ex duobus à secundo, nempe ex secundo, & tertio. & inter tertium,

& ſextum, minores adhuc terminos, hyperlogarithmus, eſt primus prologarithmus ſeriei C, ex tribus à tertio, nempe ex tertio, quarto, & quinto. Et deinceps inter minores terminos quartum, & octauum, hyperlogarithmus, eſt primus prologarithmus ſeriei *D*, ex quatuor à quarto, nempe
47. *h.* ex quarto, quinto ſexto, & ſeptimo. Sed huiuſmodi primorum prologarithmorum, minor eſt qui ex pluribus, quàm qui ex paucioribus terminis. Ergo hyperlogarithmorum duplæ rationis minor eſt, qui minores inter eſt terminos, quàm qui inter maiores. Quod &c.

Rurſum in ſerie arithmetica naturali, ratio ſub-
26. *h.* ſeſquialtera, eſt inter minimos terminos, ſecun-
22. 7. dum, & tertium; deinde inter maiores, ordinatim
19. *h.* multiplos minimorum; videlicet inter quartum, & ſextum; inter ſextum, & nonum; inter octauum,
24. *h.* & duodecimum. Ergo reciprocè in ſerie harmonica naturali, ratio ſeſquialtera eſt inter maximos terminos, ſecundum, & tertium; deinde inter minores, ſubmultiplos maximorum, quartum, & ſextum; & inter minores, ſextum, & nonum; & ad-
def.22h huc inter minores, octauum, & duodecimum. Ergo rationis ſeſquialteræ inter maximos terminos, ſecundum, & tertium, hyperlogarithmus, eſt ſecundus ſeriei *A.* deinde inter minores, quartum, & ſextum, hyperlogarithmus, eſt ſecundus pro-

loga-

logarithmus feriei *B*, ex duobus à quarto, nempe ex quarto, & quinto. & inter sextum, & nonum, adhuc minores, hyperlogarithmus, est secundus seriei *C*, ex tribus à sexto, nempe ex sexto, septimo, & octauo. & inter octauum, & duodecimum, adhuc minores, hyperlogarithmus, est secundus seriei *D*, ex quatuor ab octauo, nempe ex octauo,

49. b. nono, decimo, & vndecimo. Sed in seriebus huiusmodi, secundorum prologarithmorum, minor est, qui ex pluribus, quàm qui ex paucioribus terminis. Ergo sesquialteræ rationis hyperlogarithmorum minor est, qui minores inter terminos, quàm qui est inter maiores. Quod &c.

Similiter prorsus demonstratione ostendetur, de sesquitertia ratione, adhibitis tertijs prologarithmis earumdem serierum: & de sesqui quarta, adhibitis quartis prologarithmis: & de omni superparticulari ratione.

Quare &c.

Theor. 51. *Propos.* 51.

OMnis ratio multipla, vel est dupla, vel ex dupla & superparticularibus composita.

Demonstr.

Nam tripla 3 ad 1, ex sesquialtera, 3 ad 2, &

def.5.6. dupla, 2 ad 1, componitur: quadrupla, 4 ad 1, ex sesquitertia, 4 ad 3, sesquialtera, 3 ad 2, & dupla, 2 ad 1: quintupla, 5 ad 1, ex sesquiquarta, 5

ad 4, ſeſquitertia, 4 ad 3, ſeſquialtera, 3 ad 2, & dupla, 2 ad 1. Et ſic de reliquis.

Quare &c.

Theor. 52. *Prop.* 52.

Omnis ratio numeroſa, ex ſuperparticularibus componitur.

Hypoth.

Eſto ratio numeroſa *a* ad *b*.

Dico *a* ad *b* rationem ex ſuperparticularibus eſſe compoſitam.

Præpar.

Aſſumantur numeri 8, 5, eamdem inter ſe rationem habentes *a* ad *b*. & inter 8, & 5. medij numeri. 7. 6.

Demonſtr.

def.5.6. Ratio 8 ad 5 ex rationibus 8 ad 7, 7 ad 6, 6 ad 5, componitur. Sed 8 ad 7, ratio numeri ad numerum vnitate minorem, eſt ſuperparticularis, item 7 ad 6, 6 ad 5, ſunt rationes ſuperparticulares: ergo ratio numeroſa, 8 ad 5, vel *a* ad *b*, ex rationibus ſuperparticularibus componitur. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 53. *Prop.* 53.

Qvotcunque terminorum, è ſerie harmonica naturali, ordine quantitatis acceptorum, hyperloga-

rithmus

rithmus rationis compositæ inter extremos, componitur ex hyperlogarithmus rationum componentium, inter extremos, & medios. & hypologarithmus ex hypologarithmis. *Hypoth.*

In serie harmonica naturali, sint tres termini *a*, *b*, *c*: & esto *a*, maior, quàm *b*; & *b*, maior, quàm *c*.

Dico rationis *a* ad *c*, inter terminos *a*, *c*, hyperlogarithmum, ex, rationis *a* ad *b*, inter *a*, *b*, & rationis *b* ad *c*, inter *b*, *c*, hyperlogarithmis componi.

Et hypologarithmum, ex hypologarithmis.

Præpar.

Sumantur inter terminos *a*, *b*, omnes medij in serie harmonica naturali: necnon inter *b*, *c*. & sint inter *a*, *c* termini.

a g h i b K l m n c

Demonstr.

Hyperlogarithmus rationis *a* ad *b*, inter terminos *a*, *b*, est $a+g+h+i$. Hyperlogarithmus rationis *b* ad *c*, inter terminos *b*, *c*, est $b+K+l+m+n$. Hyperlogarithmus rationis *a* ad *c*, inter terminos *a*, *c*, est $a+g+h+i+b+K+l+m+n$. ex vtrarumque rationum *a* ad *b*; & *b* ad *c*, hyperlogarithmis, inter eosdem terminos compositus. Quod &c.

Item rationis *a* ad *b*, inter *a*, *b*, hypologarithmus est, $g+h+i+b$: & rationis *b* ad *c*, inter *b*, *c*, est $K+l+m+n+c$: & rationis *a* ad *c*, est $g+h+i+b+K+l+m+n+c$. ex vtrisque compositus. Quod &c. Quare &c.

Theor. 54. Prop. 54.

CVjusque numerosæ rationis hyperlogarithmi, quò sunt, minores inter terminos, eò sunt minores.

Hypoth.

Esto numerosa ratio inter seriei harmonicæ terminos ab vnitate, maiores 1(3*a*), 1(3*b*); & deinde inter minores 1(4*a*), 1(4*b*).

Dico inter 1(4*a*), 1(4*b*), minorem esse hyperlogarithmum, quàm inter 1(3*a*), 1(3*b*).

Præpar.

Assumantur minimi numeri in eadem ratione
21. 7. *a*, *b*: & deinceps maiores, nempe dupli, tripli,
27. *h*. quadrupli, donec inueniãtur denominatores propositorum terminorum, 3*a*, 3*b*, 4*a*, 4*b*. Deinde inter *a*, *b* ordinentur omnes medij, in serie arithmetica naturali, quorum deinceps supparticulares sunt rationes, *a*, *c*, *d*, *b*; & eorum æquemulti-
15. 5. pli 3*a*, 3*c*, 3*d*, 3*b*, easdem supparticulares habentes rationes deinceps; necnon & æquemultipli easdem habentes rationes 4*a*, 4*c*, 4*d*, 4*b*. Sumantur denique in serie harmonica termini, ab his denominati 1(3*a*), 1(3*c*), 1(3*d*), 1(3*b*): & 1(4*a*), 1(4*c*), 1(4*d*), 1(4*b*).

Demonstr.

24. *h*. Terminorum 1(4*a*), 1(4*c*), 1(4*d*), 1(4*b*) rationes deinceps, necnõ terminorum 1(3*a*), 1(3*c*), 1(3*d*), 1(3*b*), reciprocè sunt eędem, quæ terminorum

norum 4a, 4c, 4d, 4b, necnon 3a, 3c, 3d, 3b:
50. b. idest, eædem superparticulares. Quarum rationis
inter 1(4a), 1(4c), minor est hyperlogarithmus,
quàm inter 1(3a), 1(3c): & inter 1(4c), 1(4d), mi-
nor, quàm inter 1(3c), 1(3d): & inter 1(4d), 1(4b),
53. b. minor, quàm inter 1(3d), 1(3b). Et ex minoribus
hyperlogarithmis, minor est hyperlogarithmus
compositus, rationis compositæ inter extremos
1(4a), 1(4b), quàm ex maioribus, inter extremos
1(3a), 1(3b). Quod &c.

Quare &c.

Theor. 55. Prop. 55.

HYperlogarithmi rationum duplæ, & superparticularium, quò sunt, minores inter terminos, eò sunt maiores.

Præpar.

Esto *A* series harmonica naturalis: & ordinentur *B*, *C*, *D*, series prologarithmorum ab vnitate; *B* quidem, ex binis; *C*, ex ternis; *D*, ex quaternis; & sic deinceps.

Demonst.

def. 12. b Nam in serie arithmetica naturali, ratio subdu-
pla est inter minimos terminos, primum, & secun-
21. 7. dum; deinde inter maiores, ordinatim multiplos
19. b. minimorum; videlicet inter secũdum, & quartum;
24. b. inter tertium, & sextum; inter quartum, & octauũ.
def. 20 b Ergo reciprocè in serie harmonica naturali, ratio

dupla

dupla est inter maximos terminos, primum, & secundum; deinde inter minores ordinatim submultiplos maximorum; videlicet, inter secundum, & quartum; inter tertium, & sextum; inter quartum,
def.23b & octauum. Ergo rationis duplæ, inter maximos terminos primũ, & secundum, hypologarithmus, est secundus terminus seriei *A*, nempe 1(2). deinde inter minores terminos secundum, & quartum, hypologarithmus, est secundus prologarithmus seriei *B*, ex duobus à tertio, nempe ex tertio, & quarto: & inter tertium, & sextum, minores adhuc terminos hypologarithmus, est secundus prologarithmus seriei *C*, ex tribus à quarto, nempe ex quarto, quinto, & sexto. & deinceps inter minores terminos, quartum, & octauum, hypologarithmus, est secundus prologarithmus seriei *D*, ex quatuor à quinto, nempe ex quinto sexto,
48. b. septimo, & octauo. Sed huiusmodi secundorum prologarithmorum, maior est, qui ex pluribus, quàm qui ex paucioribus terminis. Ergo hypologarithmorum duplę rationis maior est, qui minores inter est terminos, quàm qui inter maiores. Quod &c.

Rursum in serie arithmetica naturali, ratio sub-
26. b. sesquialtera, est inter minimos terminos, secun-
21. 7. dum, & tertium; deinde inter maiores, ordinatim
19. b. multiplos minimorum; videlicet, inter quartum,

& sex-

& sextum; inter sextum, & nonum; inter octauum,
24. b. & duodecimum. Ergo reciprocè in serie harmonica naturali, ratio sesquialtera est inter maximos terminos, secundum, & tertium; deinde inter minores, submultiplos maximorum, quartum, & sextum; & inter minores sextum, & nonum; & adhuc inter minores octauum, & duodecimum.
def.23b Ergo rationis sesquialteræ inter maximos terminos, secundum, & tertium, hypologarithmus, est tertius seriei *A.* deinde inter minores, quartum, & sextum, hypologarithmus, est tertius prologarithmus seriei *B*, ex duobus à quinto, nempe ex quinto, & sexto. & inter sextum, & nonum, adhuc minores terminos, hypologarithmus est tertius seriei *C*, ex tribus à septimo, nempe ex septimo, octauo, & nono. & inter octauum, & duodecimum adhuc minores, hypologarithmus, est terutis seriei *D*, ex quatuor à nono, nempe ex nono, decimo, vndecimo, & duodecimo.
48. b. Sed in seriebus huiusmodi, tertiorum prologarithmorum, maior est, qui ex pluribus, quàm qui ex paucioribus terminis. Ergo sesquialteræ rationis hypologarithmorum, maior est, qui minores inter terminos, quàm qui est inter maiores. Quod &c.

Simili prorsus demonstratione ostendetur; de sesquitertia ratione, adhibitis quartis prologarithms earumdem serierum: & de sesquiquarta, adhibitis quintis prologa-

rithmis: & de omni superparticulari ratione.

Quare &c.

Theor. 56. Propos. 56.

CViusque numerosæ rationis hypologarithmi, quò sunt, minores inter terminos, eò sunt maiores.

Hypoth.

Esto numerosa ratio inter seriei harmonicæ naturalis terminos ab vnitate, maiores $1(3a)$, $1(3b)$, & deinde inter minores $1(4a)$, $1(4b)$.

Dico inter $1(4a)$, $1(4b)$, maiorem esse hypologarithmum, quàm inter $1(3a)$, $1(3b)$.

Præpar.

Assumantur minimi numeri in eodem ratione a, b: & inter minimos, medij omnes c, d: quorum terminorum a, c, d, b, rationes deinceps sunt supparticulares; assumantur & eorum multipli, donec propositorum terminorum denominatores
27. *h.* inueniantur, $3a$, $3c$, $3d$, $3b$, & $4a$, $4c$, $4d$, $4b$, eas-
15. 5. dem supparticulares habẽtes rationes deinceps. Sumantur denique in serie harmonica, termini ab his denominati $1(3a)$, $1(3c)$, $1(3d)$, $1(3b)$, &
24. *h.* $1(4a)$, $1(4c)$, $1(4d)$, $1(4b)$: quorum rationes deinceps, reciprocè sunt eędem, & superparticulares.

Demonstr.

55. *h.* Inter $1(4a)$, $1(4c)$, maior est hypologarithmus, quàm inter $1(3a)$, $1(3c)$: & inter $1(4c)$, $1(4d)$,

| 1(4d), maior, quàm inter 1(3c), 1(3d): & inter
| 1(4d), 1(4b), maior, quàm inter 1(3d), 1(3b).
53. b. | Et ex maioribus hypologarithmis, maior est hypologarithmus compositus, rationis compositæ, inter extremos 1(4a), 1(4b), quàm ex minoribus, inter extremos 1(3a), 1(3b). Quod &c.

Quare &c.

Theor. 57. Prop. 57.

EIusdem rationis, inter eosdem terminos, hyperlogarithmus hypologarithmo est maior.

Hypoth.

Sint in serie harmonica naturali ab vnitate, termini *a*, *b*: & esto *a* prior, quàm *b*.

Dico rationis *a* ad *b*, inter *a*, *b* terminos, hyperlogarithmum hypologarithmo maiorem esse.

Præpar.

Inter *a*, *b*, sumantur medij omnes in serie harmonica, quorum summa *c*. *Demonst.*

hypoth. | *a*: prior, quàm *b*.
27. *b.* | *a*: maior, quàm *b*.
| $a+c$: maior, quàm $c+b$.
def. 22 b | $a+c$: hyperlogarithmus.
def. 23 b | $c+b$: hypologarithmus.
| Ergo rationis *a* ad *b*, inter *a*, *b* terminos, hyperlogarithmus, est maior hypologarithmo.
| Quod &c. Quare &c.

Theor. 58. Prop. 58.

EIusdem rationis inter quoscunque terminos, hyperlogarithmus hypologarithmo est maior.

Hypoth. comm.

In serie harmonica naturali ab vnitate, sunto termini proportionales *a* ad *b*, vt *c* ad *d*.

Dico inter *a*, *b* hypologarithmum, hypologarithmo inter *c*, *d*, maiorem esse.

Hypoth. p. cas.

Esto *a*, maior, quàm *c*.

Demonstr.

14. 5. Quoniam *a*, maior est, quàm *c*; etiam *b*, maior est, quàm *d*: & inter *a*, *b*, maior est hyperlo-
54. h. garithmus, quàm inter *c*, *d*: sed inter *c*, *d*, hy-
58. h. perlogarithmus hypologarithmo est maior: ergo inter *a*, *b* hyperlogarithmus, hypologarithmo inter *c*, *d*, est maior. Quod &c.

Hypoth. 2. cas.

Esto *a*, minor, quàm *c*.

Demonstr.

14. 5. Quoniam *a*, minor est, quàm *c*; etiam *b* mi-
58. h. nor est, quàm *d*: & inter *a*, *b*, hyperlogarithmus
55. h. hypologarithmo est maior: hypologarithmus autem inter *a*, *b*, hypologarithmo inter *c*, *d*, est maior. Ergo inter *a*, *b* hyperlogarithmus, hypologarithmo inter *c*, *d*, est maior. Quod &c.

Quare &c.

Probl. 1. Prop. 59.

DAta ratione, terminos inuenire cuiuſpiam determinatæ rationis numeroſæ, in ſerie harmonica naturali ab vnitate, quos inter hypologarithmus ad vltimum, maior eſt, quàm in data ratione.

Hypoth.

Sit data ratio *a* ad *b*: & ſit determinata ratio numeroſa *c* ad *d*.

Oportet inuenire in ſerie harmonica naturali ab vnitate, terminos proportionales, vt *c* ad *d*: quos inter hypologarithmus ad vltimum eorum, maior eſt, quàm vt *a* ad *b*.

Conſtr.

Rationis *c* ad *d*, minimi numeri inueniantur *c*, *d*: & eſto *c* minor, quàm *d*; cuius defectus *e*: & inueniatur *f* multiplex ipſius *e*, & maior ad vnitatem, quàm vt *a* ad *b*: & quotuplex eſt *f* ad *e*, totus numerus accipiatur *g*: per quem multiplicentur *c*, *d*, termini, & fiant *gc*, *gd* producti: quibus denominatæ ſumantur vnitates in ſerie harmonica naturali, 1(*gc*), 1(*gd*).

Dico inter 1(*gc*), 1(*gd*) hypologarithmum ad 1(*gd*), maiorem eſſe, quàm vt *a* ad *b*.

Demonſtr.

9. b. | Quoniam *c*, minor eſt, quàm *d*: & *gc*, minor
12. b. | quàm *gd*: ergo reciprocè 1(*gc*) maior eſt, quàm
def. 19. b | 1(*gd*): & ſinguli medij harmonici inter 1(*gc*), 1-
p. 3. | (*gd*), ſunt maiores, quàm 1(*gd*): & ſimul omnes

ad

ad 1(*gd*) maiores sunt, quàm vt eorum multitudo ad vnitatem. & componendo hypologarithmus inter 1(*gc*), 1(*gd*), maior est ad 1(*gd*), quàm vt eius multitudo terminorum ad vnitatem.

p. 3.

Termini autem seriei harmonicę ab vnitate inclusiuè, vsque ad 1(*gd*) inclusiuè, tot sunt, quotus est *gd*: & vsque ad 1(*gc*) inclusiuè, quotus est, *gc*: & ab 1(*gc*) exclusiuè, vsque ad 1(*gd*) inclusiuè, tot, quotus est, *gd*--*gc*. Sed *d*---*c*, est *e*: & *gd* ---*gc*, est *ge*: & *g* multiplicans *e*, facit *f*. Ergo termini ab 1(*gc*) exclusiuè, vsque ad 1(*gd*) inclusiuè, tot sunt, quotus est *f*. Sed termini ab 1(*gc*) exclusiuè, vsque ad 1(*gd*) inclusiuè, componunt hypologarithmum inter 1(*gc*), 1(*gd*): ergo multitudo terminorum hypologarithmi inter 1(*gc*), 1(*gd*), est *f*. Sed *f* ad vnitatem maior est, quàm vt *a* ad *b*. Ergo hypologarithmus inter 1(*gc*), 1(*gd*), ad 1(*gd*), maior est, quàm vt *a* ad *b*. Quod &c.

44. b. *30. b.* *def. 23 b* *constr.*

Quare &c.

Probl. 2. Prop. 60.

DAta ratione, terminos inuenire cuiuspiam determinatæ rationis numerosæ, in serie harmonica naturali ab vnitate, quos inter hyperlogarithmus ad primum maior est, quàm in data ratione.

Hy-

Hypoth.

Sit data ratio *a* ad *b*: & ſit determinata ratio numeroſa *c* ad *d*: & eſto *c*, minor, quàm *d*.

Oportet inuenire, in ſerie harmonica naturali ab vnitate, terminos proportionales vt *c* ad *d*: quos inter hyperlogarithmus ad primum eorum, maior eſt, quàm vt *a* ad *b*.

Conſtr.

59. *b.* Fiat vt *d* ad *c*, ita *b* ad *e*: & inueniantur termini in ſerie harmonica naturali ab vnitate, proportionales *f* ad *g*, vt *d* ad *c*; inter quos hypologarithmus, maior ſit ad *g*, quàm vt *a* ad *e*.

Dico inter *f*, *g* hyperlogarithmum, ad *f*, maiorem eſſe, quàm vt *a* ad *b*.

Demonſtr.

conſtr. Inter *f*, *g* hypologarithmus, ad *g*, maior eſt,
conſtr. quàm vt *a* ad *e*: *g* ad *f*, eſt vt *e* ad *b*: ergo inter
4. 3. *f*, *g* hypologarithmus, ad *f*, maior eſt, quàm vt
57. *b.* *a* ad *b*. Sed inter *f*, *g* hyperlogarithmus hypo-
8. 5. logarithmo eſt maior; maioremque habet ad *f* ra-
13. 5. tionem: ergo inter *f*, *g* hyperlogarithmus, ad *f*, maior eſt, quàm vt *a* ad *b*. Quod &c.

Quare &c.

Probl. 3. Prop. 61.

DAtis duabus numeroſis, & non æquealtis rationibus, vtriúsque maioris, vel vtriúſque minoris inæquali-

qualitatis: inuenire in serie harmonica naturali, terminos duarum rationum, vt hypologarithmus altioris, maior sit hyperlogarithmo depressioris.

Hypoth.

Sint duæ rationes numerosæ, vtræque maioris, vel vtræque minoris inæqualitatis, *A* altior, *B* depressior.

Oportet in serie harmonica naturali, terminos inuenire vtrarumque, vt hypologarithmus *A*, sit maior hyperlogarithmo *B*.

Constr.

35. 7. Inueniantur *c*, *d*, minimi numeri numerosæ
35. 7. rationis *A*: quorum *c*, minor, quàm *d*. Item inueniantur *e*, *f*, minimi numerosæ rationis *B*:
d. f. 28. h. quorum *e*, minor, quàm *f*. Fiat ex *c*, *e* pro-

A			B	
c	d		e	f
ce		cf	g	de
cef	eg	cf2	fg	def
1(cef)	1(eg)		1(fg)	1(def)

9. h. ductus *ce*: & vt *c* ad *d*, ita *ce* ad *de*: & vt *e* ad *f*, ita *ce* ad *cf*. Et quoniam altior est *A*, quàm *B*; ideſt, *c* ad *d*, quàm *e* ad *f*; ideſt, *ce* ad *de*, quàm *ce* ad *cf*. & sunt minoris inæqualitatis.
def. p. 4. ergo *ce* minor est ad *de*, quàm ad *cf*. Ergo *cf*,
10. 5. minor est, quàm *de*. Sumatur inter *cf*, *de* medius quilibet numerus *g*. & multiplicentur om-
def. 28. h. nes *ce*, *cf*, *g*, *de*, communiter per *f*: & sint

pro-

def. 28 h | producti *cef*, *cf2*, *fg*, *def*. necnon multiplice *dr*
9. h. | *g*, per *e*: & sit productus *eg*. Et quoniã *cef* ad *cf2*, est
11. 5. | vt *e* ad *f*: item *eg* ad *fg*, est vt *e* ad *f*: ergo *cef* ad *cf2*,
constr. | est vt *eg* ad *fg*. Est autem *cf*, minor, quàm *gr* er-
14. 5. | go *cf2*, minor est, quàm *fg*: ergo *cef*, minor est,
| quam *eg*: ergo sunt quatuor numeri, hoc ordine,
| *cef*, *eg*, *fg*, *def*, priores minores posterioribus; à
27. h. | quibus denominatæ vnitates 1(*cef*), 1(*ge*), 1(*fg*),
| 1(*def*), sunt in serie harmonica naturali ab vnita-
24. h. | te, hoc ordine, priores maiores posterioribus. &
24. & 9. h. | est 1(*cef*) ad 1(*def*), vt *d* ad *c*; & 1(*eg*) ad 1-
| (*fg*), vt *f* ad *e*.

Dico hypologarithmum inter terminos 1(*cef*), 1(*def*), maiorẽ esse hyperlogarithmo inter terminos 1(*eg*), 1(*fg*).

Demonstr.

def. 23 h | Nam hypologarithmus inter terminos 1(*cef*),
| 1(*def*), ex 1(*eg*), ex 1(*fg*), & ex omnibus inter-
def. 22 h | medijs, alijsque terminis componitur: hyperloga-
| rithmus verò inter 1(*eg*), 1(*fg*), ex 1(*eg*), & ex
| intermedijs terminis, vsque ad 1(*fg*) exclusiuè,
| componitur. Ergo hyperlogarithmus inter 1-
| (*cef*), 1(*def*), maior est hyperlogarithmo inter
| 1(*eg*), 1(*fg*). Quod &c. Quare &c.

Probl. 4. Prop. 62.

DAta qualibet ratione inæqualitatis, inuenire in serie harmonica naturali ab vnitate, terminos determi-

natam habentes rationem inter quos hyperlogarithmus ad hypologarithmum propior est æqualitati, quàm in data ratione.

Hypoth.

Sit data ratio inæqualitatis *a* ad *b*: & sit determinata quædam ratio *C*.

Oportet inuenire terminos in ferie harmonica naturali ab vnitate, habentes eamdem *C* rationem; inter quos hyperlogarithmus ad hypologarithmum est propior æqualitati, quàm vt *a* ad *b*.

Constr.

60. *h.* Esto *a* maior quàm *b*. & inueniantur in ferie harmonica naturali ab vnitate, termini, prior *d*, posterior *e*; inter quos hyperlogarithmus ad priorem *d*, maior est, quàm vt *a* ad *a*---*b*.

Dico inter *d*, *e* hyperlogarithmum ad hypologarithmum, maiorem esse, quàm vt *a* ad *b*; maiorem, quàm vt *b* ad *a*.

Præpar.

Inter *d*, *e*, assumatur mediorum omnium harmonicorum summa *f*.

Demonstr.

deff. 22. & 23 *h.* Inter *d*, *e* hyperlogarithmus est *d*+*f*; & hy-
constr. pologarithmus *f*+*e*: & est *d*+*f* ad *d*, maior, quàm
3. 3. vt *a* ad *a*---*b*: & per conuersionem rationis; *d*
8. 5. +*f* ad *f*, minor, quàm vt *a* ad *b*. Sed *d*+*f* ad *f*
13. 5. +*e*, minor est, quàm vt *d*+*f* ad *f*. Ergo *d*+*f* ad *f*+*e*,

$f+e$, minor est, quàm vt a ad b. Ergo inter d, e hyperlogarithmus ad hypologarithmum, minor est, quàm vt a ad b. Quod &c.

58. 8. Et est hyperlogarithmus hypologarithmo
8. 5. maior: b, autem, minor, quàm a. Ergo hyperlogarithmus ad hypologarithmum maior est, quàm vt b ad a. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 59. Prop. 63.

SI fuerit prima ad secundam, minor, quàm vt tertia ad quartam; fuerit autem prima, quàm tertia, maior: erit & secunda, quàm quarta, maior.

Demonstr.

8. 5. Nam si esset secunda æqualis quartæ: esset prima ad secundam, maior, quàm vt tertia ad quar-
8. 5. tam: contra hypothesim. Quòd si secunda esset
8. 5. minor, quàm quarta: esset prima ad secundam, maior, quàm vt ad quartam: prima autem ad quar-
13. 5. tam, maior est quàm vt tertia ad quartam: esset ergo prima ad secundam, maior, quàm vt tertia ad quartam, contra hypothesim. Est ergo secunda, quàm quarta maior. Quod &c. Quare &c.

Theor. 60. Prop. 64.

SI fuerit prima ad secundam, maior, quàm vt tertia ad quartam; fuerit autem prima, quàm tertia minor:

erit & secunda, quàm quarta, minor.

Demonstr.

8. 5. Nam si esset secunda æqualis quartæ: esset prima ad secundam minor, quàm vt tertia ad quartam. contra hypothesim. Quòd si secunda esset
8. 5. maior, quàm quarta: esset prima ad secundam,
8. 5. minor, quàm vt ad quartam: prima autẽ ad quar-
13. 5. tam, minor est, quàm vt tertia ad quartam: esset ergo prima ad secundam, minor, quàm vt tertia ad quartam. contra hypothesim. Est ergo secunda, quàm quarta; minor.

Quare &c.

Theor. 61. Prop. 65.

EArumdem numerosarum rationum vna tantùm quantitas est logarithmus.

Hypoth.

Sunto duæ quantitates inæquales *a*, *b*: & esto *a*, logarithmus rationis *C*.

Dico *b* non esse logarithmum rationis *C*.

Præpar.

Sumatur eiusdem rationis *C*, hyperlogarithmus
62. *b*. *d*, & hypologarithmus *e*, propiores æqualitati, quàm vt *a* ad *b*.

Demonstr.

57. *b*. *d*: maior quàm *e*.
Si *a*, maior est, quàm *b*.

d; *e*:

constr. | *d*; *e*: minor, quàm *a*; *b*.
def.24h | *d*: maior, quàm *a*.
63. h. | *e*: maior, quàm *b*.
def.24h | *b*, non eſt logarithmus rationis C. Quod &c.
| Si *a*, minor eſt, quàm *b*.
constr. | *e*; *d*: maior, quàm *a*; *b*.
def.24h | *e*: minor, quàm *a*.
64. h. | *d*: minor, quàm *b*.
def.24h | *b*, non eſt logarithmus rationis *C*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 62. Prop. 66.

DEterminatæ numeroſæ rationis hypologarithmi ad vltimum terminum, & hyperlogarithmi ad primum, ſunt rationes quaſi infinitæ.

Demonſtr.

59. h. Poſſunt enim inueniri cuiuſque determinatę rationis numeroſæ termini in ſerie harmonica naturali ab vnitate, quorum ad vltimum, hypologari-
60. h. thmus maior eſt, quàm in data quacunque ratione: item, quorum ad primum, hyperlogarithmus maior eſt, quàm in data quacunque ratione. Qua-
def.p. 3. re hypologarithmi ad vltimum terminum, & hyperlogarithmi ad primum, ratio quaſi eſt infinita.

Theor.

Theor. 63. Propos. 67.

SI trium inæqualium quantitatum, maxima, & minima, fuerint propiores æqualitati, quàm data ratio inæqualitatis: etiam maxima, & media; media, & minima, erunt propiores æqualitati, quàm data eadem ratio.

Hypoth.

Sint inæquales quantitates *a*, *b*, *c*; maxima quidem *a*, minima *c*: & sit data ratio inæqualitatis *d* ad *e*; cuius maior terminus *d*, minor *e*: & sit *a* ad *c*, propior æqualitati, quàm *d* ad *e*.

Dico *a*; *b*, & *b*; *c*: propiores æqualitati, quàm *d*; *e*:

Demonstr.

hypoth. | *a*; *c*: propior æqualitati, quàm *d*; *e*.
def.3.3. | *a*; *c*: minor, quàm *d*; *e*. & *c*; *a*: maior, quàm *e*; *d*.
8. 5. | *a*; *b*: minor, quàm *a*; *c*. & *b*; *a*: maior, quàm *c*; *a*.
13. 5. | *a*; *b*: minor, quàm *d*; *e*. & *b*; *a*: maior, quàm *e*; *d*.
def.3.3. | *a*; *b*: propior æqualitati, quàm *d*; *e*. Quod &c.
8. 5. | *b*; *c*: minor, quàm *a*; *c*. & *c*; *b*: maior, quàm *c*; *a*.
13. 5. | *b*; *c*: minor, quàm *d*; *e*. & *c*; *b*: maior, quàm *e*; *d*.
def.3.3. | *b*; *c*: propior æqualitati, quàm *d*; *e*. Quod &c.

Quare &c.

Probl. 5. Prop. 68.

DAta qualibet ratione inæqualitatis, inuenire cuiusdam determinatæ rationis hyperlogarithmos, & hypologarithmos ad inuicem, & ad logarithmum propiores æqualitati, quàm in data ratione.

Hy-

Hypoth.

Sit data ratio inæqualitatis *a* ad *b*; cuius maior terminus *a*, minor *b*: & sit determinata quædam ratio *C*.

Oportet inuenire hyperlogarithmos, & hypologarithmos ad inuicem, & ad logarithmum rationis *C*, propiores æqualitati, quàm in ratione *a* ad *b*.

Constr.

62. *h.* | Inueniantur in serie harmonica naturali ab vnitate duo termini *d*, *e*, habentes eamdem rationem *C*; inter quos hyperlogarithmus *f*, ad hypologarithmum *g*, sit propior æqualitati, quàm in ratione *a* ad *b*. Sumanturque minores termini quàm *d*, *e*, eamdem habentes rationem *C*; inter quos esto hyperlogarithmus *h*; & esto hypologarithmus *i*: & eiusdem rationis *C*, esto logarithmus *k*.

Dico *f*, *g*, *h*, *i*, *k*, propiores esse æqualitati, quàm in ratione *a* ad *b*.

Demonstr.

54. *h.* | *f*: maior est, quàm *h*.
def. 24. *h* | *h*: maior, quàm *k*.
def. 24. *h* | *k*: maior, quàm *i*.
56. *h.* | *i*: maior, quàm *g*.
constr. | *f*; *g*: propior æqualitati, quàm *a*; *b*.
67. *b.* | *f*, *h*, *k*, *i*, *g*, propiores æqualitati, quàm in ratione *a* ad *b*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 64. Prop. 69.

EIusdem rationis hyperlogarithmi, hypologarithmi, & logarithmus, quasi sunt æquales.

Demonstr.

68. h. Possunt enim inueniri eiusdem rationis hyperlogarithmi, & hypologarithmi, & ad inuicem, & ad logarithmum propiores æqualitati, quàm in
def. 3. 3. data qualibet ratione inæqualitatis. Quare eiusdem rationis hyperlogarithmi, hypologarithmi, & logarithmus, quasi sunt æquales.

Theor. 65. Prop. 70.

ÆQuealtarum numerosarum rationum, ęquales sunt logarithmi.

Demonstr.

65. h. Earumdem enim numerosarum rationum, vna tantùm quantitas, est logarithmus. Sed æquealtæ, sunt eædem inter se. nam si non essent eędem, cum vel vtraque sit maioris, vel vtraque minoris inęqualitatis; vtrarumque maioris, quę minor esset, vel vtrarumque minoris inæqualitatis, quæ maior esset, propior esset æqualitati: & non essent inter se æquealtæ; contra hypothesim. Ergo etiam æquealtarum rationum, vna tantùm quantitas est logarithmus.

Quare &c.

Theo-

Theor. 66. Prop. 71.

NVmeroſarum rationum, altioris, maior eſt logarithmus, & depreſſioris, minor.

Hypoth.

Sunto numeroſæ rationes, *A* altior, *B* depreſſior: & eſto ipſius *A*, logarithmus *a*; & ipſius *B*, logarithmus *b*.

Dico *a*, maiorem eſſe, quàm *b*.

Præpar.

61. *b.* | Inueniatur *c*, hypologarithmus rationis *A*; & *d*, hyperlogarithmus rationis *B*; vt ſit *c*, maior, quàm *d*.

Demonſtr.

def.24 h | *a*: maior, quàm *c*.

conſtr. | *c*: maior, quàm *d*.

def.24 h | *d*: maior, quàm *b*.

| *a* maior, quàm *b*. Quod &c. Quare &c.

Theor. 67. Prop. 72.

MVltiplicatarum numeroſarum rationum hyperlogarithmi ſunt quaſi æquemultiplices: item hypologarithmi, quaſi æquemultiplices.

Hypoth.

Sunto rationes numeroſæ *A*, *B*: & eſto *A*, triplicata ipſius *B*.

Dico hyperlogarithmos *A*, hyperlogarithmorum *B*, quaſi triplices eſſe. item hypologarithmos hypologarithmorum.

Demonstr.

53. b. Ex *B*, *B* rationibus deinceps, duplicatæ rationis hyperlogarithmus, est ex hyperlogarithmis vtrarumque *B*, *B* compositus. Et ex *B*, *B*, *B* rationibus deinceps, triplicatæ rationis *A*, hyperlogarithmus, est ex hyperlogarithmis trium *B*, *B*, *B* compositus. item hypologarithmus ex hypologarithmis. Sed rationum *B*, *B*, *B* deinceps, hyperlogarithmi, sunt quasi æquales: item hypologarithmi, quasi æquales. Ergo componendo, rationis ex duabus *B*, *B*, duplicatæ hyperlogarithmus, ad hyperlogarithmum vnius *B*, quasi est duplex: & iterum componendo, rationis *A*, ex tribus *B*, *B*, *B*, triplicatæ hyperlogarithmus ad hyperlogarithmum vnius *B*, quasi est triplex. item hypologarithmus ad hypologarithmum, quasi est triplex. Quod &c.

69. b.

15. 3.

23. 3.

Quare &c.

Theor. 68. Prop. 73.

MVltiplicatarum numerosarum rationum, sunt æquemultiplices logarithmi.

Hypoth.

Sunto rationes *A*, *B*, numerosæ: & esto *A*, multiplicata ipsius *B*.

Dico logarithmum *A*, logarithmi *B*, totuplicem esse, quotuplicata est *A* ad *B*.

De-

Demonstr.

69. b. Hyperlogarithmi, hypologarithmi, & logarithmus *A*, sunt quasi æquales: item hyperlogarithmi, hypologarithmi, & logarithmus *B*, sunt quasi æquales.
72. b. Sed hyperlogarithmi *A*, ad hyperlogarithmos *B*; & hypologarithmi, ad hypologarithmos, sunt quasi totuplices, quotuplicata est
31. 3. *A* ad *B*. Ergo hyperlogarithmi *A*, ad logarithmum *B*, sunt quasi totuplices. Sunt autem loga-
65. b. rithmi *A*, & *B*, quantitates determinatæ. Ergo
33. 3. logarithmus *A*, ad logarithmum *B*, totuplex est, quotuplicata est *A* ad *B*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 69. Prop. 74.

Rationes numerosę logarithmicam inter se rationem habentes, logarithmicè sunt proportionales, vt earum logarithmi.

Hypoth.

Sunto numerosæ rationes *A*, *B*, logarithmicam inuicem rationem habentes: & esto rationis *A*, logarithmus *a*; & rationis *B*, logarithmus *b*.

Dico *A* ad *B*, esse logarithmicè, sicut *a* ad *b*.

Præpar.

Rationis *A*, & quantitatis *a*, sumantur multiplicata ratio 3*A*, & æquemultiplex quantitas 3*a*: item rationis *B*, & quantitatis *b*, multiplicata 4*B*, & æquemultiplex 4*b*.

Demonstr.

hypoth.	Rationis *A*, logarithmus est *a*.
73. b.	Rationis 3*A*, logarithmus est 3*a*.
hypoth.	Rationis *B*, logarithmus est *b*.
73. b.	Rationis 4*B*, logarithmus est 4*b*.
71. b.	Si 3*A*, est altior, quàm 4*B*; etiam 3*a*, est maior,
70. b.	quàm 4*b*: si depressior; minor: si æquealta; æqualis.
def. 8. 4.	*A* ad *B*, est logarithmicè, sicut *a* ad *b*: Quod &c.

Quare &c.

Probl. 6. Prop. 75.

DAta ratione, numerosam depressior inuenire.

Hypoth.

Esto data ratio *a* ad *b*: cuius maior terminus *a*, minor *b*.

Oportet numerosam inuenire depressiorem, quàm *a* ad *b*.

Constr.

Esto *c*, excessus *a*--*b*: & multiplicetur *c*, donec fiat maior, quàm *b*: & sit multiplicationis numerus *d*: cui addita vnitas faciat *e*.

Dico *e* ad *d*, depressiorem esse, quàm *a* ad *b*.

Demonstr.

Quoniam *cd*, maior est quàm *b*: ergo *cd*+*c*, maior est, quàm *b*+*c*; idest, maior, quàm *a*: & *cd*+*c* ad *c*, maior est, quàm *a* ad *c*: ergo per conuersionem rationis *cd*

+*c*

+c ad *cd*, minor est, quàm *a* ad *b*. Sed *cd+c* ad *cd*, est vt d+*u* ad *d*: & *e* est *d+u*: ergo *e* ad *d* minor est, quàm *a* ad *b*: & est *e* maior, quàm *d*: ergo *e* ad *d*, est depressior, quàm *a* ad *b*. Quod &c.

Quare &c.

Probl. 7. Prop. 76.

DAtis duabus rationibus non æquealtis, logarithmicam rationem habentibus: inuenire numerosam rationem, depressiorem altiore datarum, & altiorem depressiore.

Hypoth.

a *g* *e* *h* *b*
c *f* *d*
l *i* *k*

Sunto rationes datæ maioris inæqualitatis, *a* ad *b* altior, & *c* ad *d* depressior.

Oportet rationem numerosam inuenire, depressiorem, quàm *a* ad *b*, & altiorem, quàm *c* ad *d*.

Constr.

Sumatur inter *a*, *b*, media proportionalis *e*: & inter *c*, *d*, media *f*. Et vt *f* ad *c*, ita fiat *e* ad *g*: & vt *f* ad *d*, ita *e* ad *h*: & erit ex æquali *g* ad *h*, vt *c* ad *d*: eritque *g*, maior, quàm *h*: & erunt *g*, *e*, *h*, tres continuè proportionales: eritque *g*, maior, quàm *e*; & *e*, maior, quàm *h*.

Et quoniam sicut *a* ad *b*, duplicata est rationum *a* ad *e*, & *e* ad *b*; sic *g* ad *h*, duplicata est rationum *g* ad *e*, & *e* ad *h*:

a *g* *e* *h* *b*
c *f* *d*
l *i* *k*

18. 4. *e* ad *h*: permutando erit sicut *a* ad *b*, altior, quàm *g* ad *h*; sic *a* ad *e*, & *e* ad *b*, altior, quàm *g* ad *e*, & *e* ad *h*: suntque rationes maioris inæqualitatis: ergo *a* ad *e*, maior est, quàm *g* ad *e*: & *a*, maior, quàm *g*. item *e* ad *b*, maior est, quàm *e* ad *h*: & *h*, maior, quàm *b*.

Duarum quantitatum *h*---*b*, vel *b*, sumatur vna non maior, quàm altera: quæ sit *h*---*b*: cuius æqualiter diuisæ secundum quemlibet numerum particula sit *i*. & multiplicetur *i*, donec fiat primò maior, quàm *b*: & esto multiplicationis numerus *k*. Deinde multiplicetur *i*, donec fiat primò maior, quàm *g*: & sit multiplicationis numerus *l*.

Dico *l* ad *k*, depressiorem esse, quàm *a* ad *b*: altiorem, quàm *c* ad *d*.

Demonstr.

Maior est *h*---*b*, quàm *i*: sed *Ki*---*b* non maior: ergo *h*---*b*, maior est, quàm *Ki*---*b*: & *h*, maior, quàm *Ki*: & est *Ki* maior, quàm *b*. Deinde *a* ad *e*, est vt *e* ad *b*: & *e* ad *g*, est vt *h* ad *e*: ergo ex æquali in perturbata, *a* ad *g*, est vt *h* ad *b*. & permutando *a* ad *h*, vt *g* ad *b*: & *a*---*g* ad *h*---*b* vt *a* ad *g*: sed *a* maior est, quàm *g*: ergo *a*---*g*, maior est, quàm *h*---*b*: sed *h*---*b*, maior est, quàm *i*: ergo *a*---*g*, maior est, quàm *i*. sed *li*---*g*, non maior est, quàm *i*. ergo *a*---*g*, maior est, quàm *li*---*g*: ergo *a* maior

ior eſt, quàm *li*. Ergo *li* ad *ki*, vel *l* ad *k* minor eſt, quàm *a* ad *b*: & ſunt maioris inæqualitatis: ergo *l* ad *K* depreſſior eſt, quàm *a* ad *b*. Quod &c. Rurſum *li* maior eſt, quàm *g*: & *h* maior eſt quàm *Ki*. Ergo *li* ad *Ki*, vel *l* ad *K*, maior eſt, quàm *g* ad *h*, vel quàm *c* ad *d*: & ſunt maioris inæqualitatis rationes: ergo *l* ad *K*, altior eſt, quàm *c* ad *d*. Quod &c.

Quare &c.

Probl. 8. *Prop.* 77.

DAta qualibet non numeroſa ratione, dataque altera qualibet ratione inęqualitatis: duas numeroſas rationes inuenire altiorem & depreſſiorem, quàm data non numeroſa; logarithmicè proportionales, vt numerus ad numerum; propiores æqualitati logarithmicæ, quàm ſit data altera ratio.

Hypoth.

Sit data quælibet ratio non numeroſa; cuius maior terminus *a*, minor *b*: & ſit data altera ratio inæqualitatis; cuius maior terminis *c*, minor *d*.

Oportet inuenire duas rationes numeroſas, altiorem, quàm *a* ad *b*, & depreſſiorem, quàm *a* ad *b*; logarithmicè proportionales, vt numerus ad numerum: ſed vt altior ad depreſſiorem logarithmicè ſit minor, quàm vt *c* ad *d*.

Conſtr.

75. *h.* Inueniatur ratio numeroſa *e* ad *f*, depreſſior, quàm *c* ad *d*. ſumaturque numerus *g*, pariter par,

ma-

53. 3. maior quàm *e*: & quotus est *g*, subtotuplicata, rationis *a* ad *b*, ratio inueniatur *h* ad *i*: & inueniatur numerosa ratio *K* ad *l*, depressior, quàm *h* ad *i*: & rationis *K* ad *l*, sumantur duplicata, triplicata, & deinceps reliquæ multiplicatæ, donec fiat ratio *M*, primò altior, quàm *a* ad *b*: & sit multiplicationis numeris *m*: qui vnitate multatus, relinquatur *n*: & quotus est *n*, totuplicata, rationis *K* ad *l*, fiat ratio *N*.

Dico rationem *N* depressiorem esse, quàm *a* ad *l*: & *M* ad *N* logarithmicè minorem esse, quàm vt *c* ad *d*.

Demonstr.

Si enim ratio *N*, non esset depressior, quàm *a* ad *b*: esset vel æquealta, vel altior. Sed non est altior alioquin *M*, non esset primò altior, quàm *a* ad *b*. neque est ęquealta, alioquin esset eadem, atque *a* ad *b*: & esset etiam *a* ad *b* ratio numerosa, contra hypothesim. Ergo ratio *N*, est depressior, quàm *a* ad *b*.

Deinde quoniam *K* ad *l*, est depressior, quàm *h* ad *i*: & *h* ad *i*, totuplicata quotus est *g*, est *a*
19. 4. ad *b*: ergo *K* ad *l*, totuplicata quotus est *g*, est depressior, quàm *a* ad *b*. sed *K* ad *l*, totuplicata
5. 3. & quotus est *m*, est altior, quàm *a* ad *b*. Ergo nu-
def. p. 4. merus *m*, maior est, quàm *g*: sed *g*, est maior, quàm *e*: ergo *m*, multò est maior, quàm *e*: & est *m* ad vnitatem, maior, quàm *e* ad eamdem vnitatem: & per conuersionem rationis, *m* ad *n*, minor

constr. | nor eſt, quàm *e* ad *f*. Sed vt *m* ad *n*, ita logari-
17. 4. | thmicè eſt ratio *M* ad rationem *N*. ergo ratio *M* ad rationem *N*, minor eſt logarithmicè, quàm vt *e* ad *f*: & multò minor, quàm vt *c* ad *d*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 70. *Prop.* 78.

NOn numeroſæ rationis vna tantùm quantitas eſt logarithmus.

Hypoth. p.

Eſto ratio *a* ad *b* non numeroſa: ſintque duæ quantitates inæquales, *c* maior, *d* minor: quarum vna *c*, eſto logarithmus rationis *a* ad *b*.

Dico *d*, non eſſe logarithmum rationis *a* ad *b*.

Præpar.

77. *b.* | Inueniantur duæ rationes numeroſæ, *E* altior, quàm *a* ad *b*, & *F* depreſſior: vt ſit *E* ad *F*, logarithmicè ſicut numerus ad numerum, & minor, quàm vt *c* ad *d*. & aſſignentur ipſarum *E*, *F* rationum, logarithmi *e*, *f*.

Demonſtr.

præpar. | *E*; *F*: logarithmicè minor, quàm *c*; *d*.
74. *b.* | *E*; *F*: *e*; *f*.
17. 4. | *e*; *f*: minor, quàm *c*; *d*.
def. 34 *b* | *e*: maior, quàm *c*.
63. *b.* | *f*: maior, quàm *d*.
def. 34 *b* | *d*, non eſt logarithmus rationis *a* ad *b*. Quod &c.

Hypoth. 2.

Esto *d*, logarithmus rationis *a* ad *b*.

Dico *c*, non esse logarithmum rationis *a* ad *b*.

Demonstr.

sup. | *e*; *f*: minor, quàm *c*; *d*.
2.3. | *f*; *e*: maior, quàm *d*; *c*.
def.34b | *f*: minor, quàm *d*.
64. *h*. | *e*: minor, quàm *c*.
def.34b | *c*, non est logarithmus rationis *a* ad *b*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 71. Prop. 79.

Non numerosarum rationum, altioris maior est logarithmus, & depressioris minor.

Hypoth.

Sunto non numerosæ rationes, *A* altior, *B* depressior: & esto ipsius *A*, logarithmus *a*; & ipsius *B*, logarithmus *b*.

Dico *a*, maiorem esse, quàm *b*.

Præpar.

76. *h*. | Inter *A*, *B* rationes, inueniatur numerosa ratio *C*, depressior, quàm *A*, altior quàm *B*: cuius logarithmus esto *c*.

Demonstr.

def.34b | *a*: maior est, quàm *c*.
def.34b | *c*: maior, quàm *b*.
| *a*: maior, quàm *b*. Quod &c. Quare &c.

Theo-

Theor. 72. Prop. 80.

MVltiplicatarum rationum, ſunt æquemultiplices logarithmi.

Hypoth.

Eſto ratio *A* rationis *B* triplicata: & eſto rationis *A*, logarithmus *a*; & rationis *B*, logarithmus *b*.

Dico *a* ad *b* triplicem eſſe.

Hypotheſis contradictoria in primo caſu.

		c	*d*		
E	*A*	*F*	*G*	*B*	*H*
e	*a*	*f*	*g*	*b*	*h*

Eſto ſi fieri poteſt *a* maior, quàm triplex ad *b*.

Præpar.

76. *b.* Inter rationem *a* ad *b* altiorem, & rationem triplicem depreſſiorem, ratio numeroſa ſumatur *c* ad
77. *b.* *d*, depreſſior, quàm *a* ad *b*, altior, quàm triplex, & vt *a*, ſit maior, quàm *c*; & *d*, maior, quàm *b*. Et inueniantur duæ numeroſæ rationes, *E* altior quàm *A*, & *F* depreſſior: vt ſit *E* ad *F* logarithmicè ſicut numerus ad numerũ, & minor, quàm
77. *b.* vt *a* ad *c*. Item inueniantur duę numeroſæ rationes, *G* altior quàm *B*, & *H* depreſſior; vt ſit *G* ad *H* logarithmicè ſicut numerus ad numerum, & minor quàm vt *d* ad *b*. Sint autem rationum *E*, *F*, *G*, *H*, logarithmi *e*, *f*, *g*, *h*.

c d

E A F G B H

e a f g l h

Demonstr.

præpar.	*A*: altior, quàm *F*.
14. 4.	*A*; *B*: logarithmicè maior, quàm *F*; *B*.
præpar.	*G*: altior, quàm *B*.
14. 4.	*F*; *B*: logarithmicè maior, quàm *F*; *G*.
17. 4.	*A*; *B*: logarithmicè maior, quàm *F*; *G*.
hypoth.	*A*; *B*: triplicata.
17. 4.	*F*; *G*: depreſſior, quàm triplicata.
74. *h*.	*F*; *G*: logarithmicè *f*; *g*.
17. 4.	*f*; *g*: minor, quàm triplex.
præpar.	*E*; *F*: logarithmicè minor, quàm *a*; *c*.
74. *h*.	*E*; *F*: logarithmicè *e*; *f*.
17. 4.	*e*; *f*: minor, quàm *a*; *c*.
def. 34 *h*	*e*: maior, quàm *a*.
63. *h*.	*f*: maior, quàm *c*.
præpar.	*G*; *H*: logarithmicè minor, quàm *d*; *b*.
74. *h*.	*g*; *h*: logarithmicè *G*; *H*.
17. 4.	*g*; *h*: minor, quàm *d*; *b*.
2. 3.	*h*; *g*: maior, quàm *b*; *d*.
def 32 *h*	*h*: minor, quàm *b*.
64. *h*.	*g*: minor, quàm *d*.
67. *h*.	*f*; *g*: maior, quàm *c*; *d*.
præpar.	*c*; *d*: maior, quàm triplex.

f; *g*:

13. 5. | *f*; *g*: maior, quàm triplex. } quæ ſunt contradi-
ſup. | *f*; *g*: minor, quàm triplex. } ctoria.

Ergo *a* ad *b*, non eſt maior, quàm triplex.

Hypoth. contrad. in ſecundo caſu.

c *d*

E *A* *F* *G* *B* *H*

e *a* *f* *g* *b* *h*

Eſto ſi fieri poteſt *a* minor, quàm triplex ad *b*.

Præpar.

76. *b.* | Inter rationem *a* ad *b* depreſſiorem, & rationem triplicem altiorem ratio numeroſa ſumatur *c* ad *d*, depreſſior, quàm triplex; altior, quàm *a* ad *b*: & vt *c* ſit maior quàm *a*: & *b* maior, quàm
77. *b.* | *d*. Et inueniantur duæ numeroſæ rationes, *E* altior quàm *A*, & *F* depreſſior; vt ſit *E* ad *F* logarithmicè, ſicut numerus ad numerum, & minor,
77. *b.* | quàm vt *c* ad *a*. Item inueniantur duæ numeroſæ rationes; *G* altior, quàm *B*; & *H*, depreſſior; vt ſit *G* ad *H*, logarithmicè ſicut numerus ad numerum, & minor, quàm vt *b* ad *d*. Sint autem rationum *E*, *F*, *G*, *H*, logarithmi *e*, *f*, *g*, *h*.

Demonſtr.

præpar. | *E*: altior, quàm *A*.
14. 4. | *E*; *H*: logarithmicè maior, quàm *A*; *H*.
præpar. | *B*: altior, quàm *H*.
14. 4. | *A*; *H*: logarithmicè maior, quàm *A*; *B*.
17. 4. | *E*; *H*: logarithmicè maior, quàm *A*; *B*.

A; *B*:

c *d*

E *A* *F* *G* *B* *H*

e *a* *f* *g* *b* *h*

hypoth.	*A*; *B*: triplicata.
17. 4.	*E*; *H*: maior, quàm triplicata.
74. *b.*	*e*; *h*: logarithmicè vt *E*; *H*.
17. 4.	*e*; *h*: maior, quàm triplex.
præpar.	*E*; *F*: minor, quàm *c*; *a*.
74. *b.*	*E*; *F*: logarithmicè vt *e*; *f*.
17. 4.	*e*; *f*: minor, quàm *c*; *a*.
2. 3.	*f*; *e*: maior, quàm *a*; *c*.
*def.*34*b*	*f*: minor, quàm *a*.
64. *b.*	*e*: minor, quàm *c*.
præpar.	*G*; *H*: logarithmicè minor, quàm *b*; *d*.
74. *b.*	*g*; *h*: logarithmicè, vt *G*; *H*.
17. 4.	*g*; *h*: minor, quàm *b*; *d*.
*def.*32*b*	*g*: maior, quàm *b*.
63. *b.*	*h*: maior, quàm *d*.
67. *b.*	*e*; *h*: minor, quàm *c*; *d*.
præpar.	*c*; *d*: minor, quàm triplex.
13. 5.	*e*; *h*: minor, quàm triplex. } quæ ſunt contradi-
Imp.	*e*; *h*: maior, quàm triplex. } ctoria.

Ergo *a* ad *b*, non eſt minor, quàm triplex.

Ergo *a* ad *b* eſt triplex. Quod &c.

Quare &c.

Theo-

Theor. 73. *Prop.* 81.

OMnifariam rationes, logarithmicam inter se rationem habentes, logarithmicè sunt proportionales, vt earum logarithmi. *Hypoth.*

Dico *A* ad *B*, esse logarithmicè, sicut *a* ad *b*.

Sunto rationes *A*, *B*, logarithmicam inuicem rationem habentes: & esto rationis *A*, logarithmus *a*; & rationis *B*, logarithmus *b*.

Præpar.

Rationis *A*, & quantitatis *a*, sumantur multiplicata ratio 3*A*, & æquemultiplex quantitas 3*a*: item rationis *B*, & quantitatis *b*, multiplicata 4*B*, & æquemultiplex 4*b*.

Demonstr.

hypoth. | Rationis *A*, logarithmus est *a*.
80. *b.* | Rationis 3*A*, logarithmus est 3*a*.
hypoth. | Rationis *B*, logarithmus est *b*.
80. *b.* | Rationis 4*B*, logarithmus est 4*b*.
def. 34*b* | Si 3*A*, est altior, quàm 4*B*; etiam 3*a*, est maior,
79. *b.* | quàm 4*b*: si depressior; minor: si ęquealta; ęqualis.
def. 8.4. | *A* ad *B*, est logarithmicè, sicut *a* ad *b*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 74. *Prop.* 82.

DVarum quarumlibet numerosarum rationum, hyperlogarithmus vnius ad hypologarithmum alterius, maior est, quàm vt logarithmus ad logarithmum.

De-

Demonstr.

def.24h Est enim hyperlogarithmus vnius, eiusdem logarithmo maior: & est hypologarithmus alterius, 8. 5. minor eiusdem logarithmo. Ergo hyperlogarithmus ad logarithmum vnius, maior est, quàm vt p. 3. hypologarithmus ad logarithmum alterius. Quare permutando, vnius hyperlogarithmus ad hypologarithmum alterius, maior est, quàm vt logarithmus ad logarithmum.

Probl. 9. Prop. 83.

DVarum datarum non æquealtarum numerosarum rationum, datis terminis altioris: inuenire terminos depressioris, inter quos ad hyperlogarithmum, maior sit hyperlogarithmus altioris, quàm vt logarithmus ad logarithmum.

Hypoth.

Sint datæ duæ non æquealtæ numerosæ rationes, *A* altior, *B* depressior: sintque rationis *A*, dati termini *c*, *d*.

Oportet rationis *B* terminos inuenire, inter quos ad hyperlogarithmum, maior est hyperlogarithmus inter *c*, *d*; quàm vt logarithmus *A* ad logarithmum *B*.

Constr.

Sumatur inter *c*, *d*, hyperlogarithmus *e*: & inter alios quoslibet eiusdem rationis *A* terminos 54. h. minores, quàm *c*, *d*, sumatur alius minor hyper-62. h. logarithmus *f*: & inueniantur termini *g*, *h*, in ratione

tione *B*, inter quos hyperlogarithmus *i*, ad hypologarithmum *K*, propior sit æqualitati, quàm vt *e* ad *f*.

Dico *e* ad *i* maiorem esse, quàm vt logarithmus rationis *A*, ad logarithmum rationis *B*.

Præpar.

Esto *a*, logarithmus rationis *A*: & *b*, logarithmus rationis *B*.

Demonstr.

def.24h	*f*: maior est, quàm *a*.
8. 5.	*e*; *a*: maior, quàm *e*; *f*.
constr.	*e*; *f*: maior, quàm *i*; *k*.
def 24h.	*b*: maior, quàm *k*.
8. 5.	*i*; *k*: maior, quàm *i*; *b*.
13. 5.	*e*; *a*: maior, quàm *i*; *b*.
p. 3.	*e*; *i*: maior, quàm *a*; *b*. Quod &c.

Quare &c.

Probl. 10. *Prop.* 84.

DVarum datarum non æquealtarum numerosarum rationum, datis terminis depressioris: inuenire terminos altioris, inter quos hyperlogarithmus, ad hyperlogarithmum depressioris, minor sit, quàm vt logarithmus ad logarithmum.

Hypoth.

Sint datæ duæ non æquealtæ numerosæ rationes, *A* altior, *B* depressior: sintque rationis *B* dati termini *c*, *d*.

Oportet rationis *A* terminos inuenire, inter quos hy-

perlogarithmus, ad hyperlogarithmum inter *c*, *d* minor est, quàm vt logarithmus *A* ad logarithmum *B*.

Constr.

Sumatur inter *c*, *d*, hyperlogarithmus *e*: & inter alios quoslibet minores terminos, quàm *c*, *d*,
54. *h.* sumatur eiusdem rationis *B* alius minor hyper-
62. *h.* logarithmus *f*: rationis autem *A*, inueniantur termini, *g*, *h*, inter quos hyperlogarithmus *i*, ad hypologarithmum *k*, minor sit, quàm vt *e* ad *f*.

Dico *i* ad *e*, minorem esse, quàm vt logarithmus *A* ad logarithmum *B*.

Præpar.

Esto *a*, logarithmus rationis *A*: & *b*, logarithmus rationis *B*.

Demonstr.

def.24h *a*: maior est, quàm *K*.
8. 5. *i*; *a*: minor, quàm *i*; *K*.
constr. *i*; *K*: minor, quàm *e*; *f*.
def.24h *b*: minor, quàm *f*.
8. 5. *e*; *f*: minor, quàm *e*; *b*.
13. 5. *i*; *a*: minor, quàm *e*; *b*.
p. 3. *i*; *e*: minor, quàm *a*; *b*. Quod &c.

Quare &c.

Probl. 11. *Prop.* 85.

DVarum datarum non æquealtarum numerosarum rationum, datis terminis altioris: inuenire terminos

nos depressioris, inter quos ad hypologarithmum minor sit hypologarithmus altioris, quàm vt logarithmus ad logarithmum.

Hypoth.

Sint datæ duæ non æquealtæ rationes numerosæ, *A* altior, *B* depressior: sintque rationis *A* dati termini *c*, *d*.

Oportet rationis *B* terminos inuenire, inter quos ad hypologarithmum minor sit hypologarithmus inter *c*, *d*, quàm vt logarithmus *A* ad logarithmum *B*.

Constr.

Sumatur inter *c*, *d*, hypologarithmus *e*: & inter alios terminos eiusdem rationis *A*, minores
56. *b.* quàm *c*, *d*, sumatur alius maior hypologarithmus
62. *b.* *f*: & inueniantur in ratione *B*, termini *g*, *h*; inter quos hypologarithmus *i* ad hyperlogarithmum *k* maior sit, quàm vt *e* ad *f*.

Dico *e* ad *i*, minorem esse, quàm vt logarithmus *A* ad logarithmum *B*.

Præpar.

Esto *a*, logarithmus rationis *A*: & *b*, logarithmus rationis *B*.

Demonstr.

constr. *e*; *f*: minor, quàm *i*; *K*.
p. 3. *e*; *i*: minor, quàm *f*; *K*.
*def.*24*b* *K*: maior, quàm *b*.
8. 5. *f*; *K*: minor, quàm *f*; *b*.
*def.*24*b* *a*: maior, quàm *f*.

8.5. | *f*; *b*: minor, quàm *a*; *b*.
13.5. | *e*; *i*: minor, quàm *a*; *b*. Quod &c.
Quare &c.

Probl. 12. *Prop.* 86.

DVarum datarum non æquealtarum numerosarum rationum, datis terminis depressioris: inuenire terminos altioris, inter quos hypologarithmus ad hypologarithmum depressioris, maior sit, quàm vt logarithmus ad logarithmum.

Hypoth.

Sint datæ duæ non æqualtæ numerosæ rationes, *A* altior, *B* depressior: sintque rationis *B* dati termini *c*, *d*.

Oportet rationis *A* terminos inuenire, inter quos hypologarithmus ad hypologarithmum inter *c*, *d*, maior est, quàm vt logarithmus *A* ad logarithmum *B*.

Constr.

| Sumatur inter *c*, *d*, hyploogarithmus *e*: & inter alios minores terminos, eiusdem rationis *B*,
56. *b*. | sumatur alius maior hypologarithmus *f*: & ratio-
62. *b*. | nis *A*, inueniantur termini *g*, *h*, quos inter hypologarithmus *i* ad hyperlogarithmum *K* maior sit, quàm vt *e* ad *f*.

Dico *i* ad *e*, maiorem esse, quàm vt logarithmus *A* ad logarithmum *B*.

Præpar.

Esto rationis *A*, logarithmus *a*: & rationis *B* logarithmus *b*.

De-

Demonstr.

constr.	*i*; *K*: maior est, quàm *e*; *f*.
p. 3.	*i*; *e*: maior, quàm *K*; *f*.
def. 24 b	*b*: maior, quàm *f*.
8. 5.	*K*; *f*: maior, quàm *K*; *b*.
def. 24 b	*K*: maior, quàm *a*.
8. 5.	*K*; *b*: maior, quàm *a*; *b*.
13. 5.	*i*; *e*: maior, quàm *a*; *b*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 75. Prop. 87.

ARithmeticè dispositorum terminorum ratio, quàm habent bini minores ad inuicem, altior est ratione, quam habent bini maiores.

Hypoth.

	Sint arithmeticè dispositę quantitates *a*, *b*, *c*, *d*:
4. *b.*	& sit *a* minor, quàm *c*. vnde quoniam permutando
def. 5. b.	*a*, *c*, *b*, *d*, sunt arithmeticè dispositæ, etiam
	b est minor, quàm *d*.

Dico rationes terminorum *a*, *b* ad inuicem, altiores esse rationibus *c*, *d* ad inuicem.

Præpar.

Quoniam *a*, *b* sunt inæquales; esto *a* minor, quàm *b*: & sit defectus *e*.

Demonstr.

sup.	*b*: minor, quàm *d*.
8. 5.	*b*; *e*: minor, quàm *d*; *e*.

3. 3.	*b*; *a*: maior, quàm *d*; *c*.
hypoth.	*b*: maior, quàm *a*. & *d*: maior, quàm *c*.
def.p.4.	*b*; *a*: altior, quàm *d*; *c*. Quod &c.
2. 3.	*a*; *b*: minor, quàm *c*; *d*.
hypoth.	*a*: minor, quàm *b*. & *c*: minor, quàm *d*.
def.p.4.	*a*; *b*: altior, quàm *c*; *d*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 76. Prop. 88.

Harmonicè diſpoſitum terminorum ratio, quàm habent bini maiores ad inuicem, altior eſt ratione, quàm habent bini minores.

Hypoth.

Sint harmonicè diſpoſitæ quantitates *a*, *b*, *c*, *d*:
34. *b.* & ſit *a* maior, quàm *c*. vnde quoniam permutando
def.13b *a*, *c*, *b*, *d*, ſunt harmonicè diſpoſitæ, etiam *b*, eſt maior, quàm *d*.

Dico rationes terminorum *a*, *b* ad inuicem, altiores eſſe rationibus *c*, *d* ad inuicem.

Præpar.

Sumatur vna quælibet quantitas *e*: & fiat

a; *e*: *e*; *f*.
b; *e*: *e*; *g*.
c; *e*: *e*; *h*.
d; *e*: *e*; *i*.

De-

Demonstr.

33. *h.* | *f, g, g, i* sunt arithmeticè ordinatæ.
constr. | *c; e: e; h. e; a: f; e.*
p. p. | *c; a: f; h.*
| *c*: minor, quàm *a.* & *f*: minor, quàm *h.*
def 5.h. | *g*: minor, quàm *i.*
87. *h.* | *f; g*: altior, quàm *h; i.* & *g; f*: altior, quàm *i; h.*
sup. | *f; g: b; a.* & *g; f: a; b.*
sup. | *h; i: d; c.* & *i; h: c; d.*
| *b; a*: altior, quàm *d; c.* & *a; b*: altior, quàm *c; d.* Quod &c. Quare &c.

Theor. 77. Prop. 89.

SI fuerint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero; sitque maior proportio primæ priorum, ad primam posteriorum, quàm secundę, ad secundam; & hæc maior, quàm tertiæ, ad tertiam: & sic deinceps: habebunt omnes priores simul, ad omnes posteriores simul, maiorem rationem, quàm omnes priores, relicta prima, ad omnes posteriores, relicta quoque prima: & multò maiorem, quàm omnes priores, relictis duabus primis, ad omnes posteriores, relictis duabus primis: & sic deinceps etiam maiorem, quàm vltima, ad vltimam: sed minorem, quàm omnes priores, relicta vltima, ad omnes posteriores, relicta etiam vltima: & multò minorem, quàm omnes priores, relictis duabus vltimis, ad omnes posteriores, relictis pariter duabus vltimis: & sic deinceps etiam minorem, quàm prima, ad primam.

Hy-

Hypoth.

$a \quad e$
$b \quad f$
$c \quad g$
$d \quad h$

$a; e$: maior, quàm $b; f$.
$b; f$: maior, quàm $c; g$.
$c; g$: maior, quàm $d; h$.

Dico $a+b+c+d; e+f+g+h$: maiorem esse, quàm $b+c+d; f+g+h$.

Et $b+c+d; f+g+h$: maiorem, quàm $c+d; g+h$.

Et $c+d; g+h$: maiorem, quàm $d; h$.

Dico etiam $a+b+c+d; e+f+g+h$: minorem esse, quàm $a+b+c; e+f+g$.

Et $a+b+c; e+f+g$: minorem, quàm $a+b, e+f$.

Et $a+b; e+f$: minorem, quàm $a; e$.

Demonstr.

hypoth.	$c; g$: maior, quàm $d; h$.
p. 3.	$c; d$: maior, quàm $g; h$.
p. 3.	$c+d; d$: maior, quàm $g+h; h$.
p. 3.	$c+d; g+h$: maior, quàm $d; h$. Quod &c.
3. 3.	$c+d; c$: minor, quàm $g+h; g$.
2. 3.	$c; c+d$: maior, quàm $g; g+h$.
p. 3.	$c; g$: maior, quàm $c+d; g+h$.
hypoth.	$b; f$: maior, quàm $c; g$.
13. 5.	$b; f$: maior, quàm $c+d; g+h$.
p. 3.	$b; c+d$: maior, quàm $f; g+h$.

$b+c$

p. 3. | $b+c+d$; $c+d$: maior, quàm $f+g+h$; $g+h$.

p. 3. | $b+c+d$; $f+g+h$: maior, quàm $c+d$; $g+h$. Quod &c.

sup. | $a+b+c+d$; $e+f+g+h$: maior, quàm $b+c+d$; $f+g+h$. Quod &c.

hypoth. | a; e: maior, quàm b; f.

p. 3. | a; b: maior, quàm e; f.

p. 3. | $a+b$; b: maior, quàm $e+f$; f.

3. 3. | $a+b$; a: minor, quàm $e+f$; e.

p. 3. | $a+b$; $e+f$: minor, quàm a; e. Quod &c.

sup. | $a+b$; b: maior, quàm $e+f$; f.

p. 3. | $a+b$; $e+f$: maior, quàm b; f.

hypoth. | b; f: maior, quàm c; g.

13: 5. | $a+b$; $e+f$: maior, quàm c; g.

p. 3. | $a+b$; c: maior, quàm $e+f$; g.

p. 3. | $a+b+c$; c: maior, quàm $e+f+g$; g.

3. 3. | $a+b+c$; $a+b$: minor, quàm $e+f+g$; $e+f$.

p. 3. | $a+b+c$; $e+f+g$: minor, quàm $a+b$; $e+f$. Quod &c.

sup. | $a+b+c+d$; $e+f+g+h$: minor, quàm $a+b+c$; $e+f+g$. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 78. Prop. 90.

E Serie harmonica naturali ab vnitate, terminorum harmonicè diſpoſitorum, altioris rationis maior terminus, ad maiorem depreſſioris, maior eſt, quàm vt hyperlogarithmus, ad hyperlogarithmum: & hyperlogarithmus,

thmus, ad hyperlogarithmum, maior, quàm vt hypologarithmus, ad hypologarithmum: & hypologarithmus, ad hypologarithmum maior, quàm vt minor terminus, ad minorem.

Hypoth.

Sint è ſerie harmonica naturali ab vnitate, termini harmonicè diſpoſiti *a*, *b*, *c*, *d*, quorum altior ſit ratio *a* ad *b*, quàm *c* ad *d*. Sitque *a*, maior, quàm *b*: ideoque & *c*, maior, quàm *d*.

def.13b

Quoniam *a* ad *b*, altior eſt, quàm *c* ad *d*: oportet *a*, maiorem eſſe, quàm *c*; & *b*, quàm *d*. alioquin permutando, diſpoſitorum harmonicè *a*, *c*, *b*, *d*, eſſet *c* maior, quàm *a*; ideoque & *d* maior, quàm *b*; & *c* ad *d*, altior ratio, quàm *a* ad *b*, *contra hypoth.*

34. b. def.13.b 88. b.

Deinde quoniam *a*, *b*, *c*, *d*, ſunt in ſerie harmonica naturali ab vnitate, harmonicè diſpoſiti; ſunt denominati à numeris arithmeticè diſpoſitis: quorum denominator *a*, reciprocè minor eſt denominatore *b*, necnon reciprocè minor denominatore *c*. & quot ſunt numeri omnes medij inter denominatores *a*, *b*; totidem ſunt inter denominatores *c*, *d*: totidemque in ſerie harmonica ſunt inter *a*, *b*; totidemque etiam inter *c*, *d*.

27. b. 26. b. 24. b. def.5.b. 27. b.

Sint ergo inter *a*, *b* termini *e*, *f*: & inter *c*, *d*, totidem termini *g*, *h*: eritque $a+e+f$, hyperlogarithmus rationis *a*, ad *b*; & $e+f+b$, hypologari-

def.22b def.23b

garithmus eiusdem rationis, inter eosdem terminos a, b. erit quoque $c+g+h$, hyperlogarithmus rationis c ad d; & $g+h+d$, eiusdem hypologarithmus inter eosdem terminos c, d.

Dico a ad c, maiorem esse, quàm $a+e+f$ ad $c+g+h$:

Et $a+e+f$ ad $c+g+h$, maiorem, quàm $e+f+b$ ad $g+h+d$.

Et $e+f+b$ ad $g+h+d$, maiorem, quàm b ad d.

Demonstr.

hypoth. Quoniam a, e, f, b, necnon c, g, h, d, sunt harmonicè ordinati, in serie harmonica naturali
27. b. ab vnitate: ergo eorum denominatores, sunt arithmeticè ordinati, in serie arithmetica naturali ab
sup. vnitate: totidemque sunt a, e, f, b; quot c, g, h,
def.8.b. d: ergo denominatores a, e, f, b; sunt similiter arithmeticè dispositi, atque denominatores c, g,
16. b. h, d: ergo etiam a, e, f, b sunt similiter harmoni-
def.16b cè dispositi, atque c, g, h, d: ergo a, e, c, g sunt
34. b. harmonicè dispositi: ergo permutando a, c, e, g, sunt harmonicè dispositi. Similiter ostendetur, quòd e, g, f, h sunt harmonicè dispositi: necnon f, h, b, d.

def.19b Rursum quoniam a, e, f, b sunt harmonicè ordinati, & est a maior, quàm b: ergo a maior, est quàm e; & e, maior, quàm f: & f, quàm b: item
sup. c, maior est quàm g; g, quàm h; h, quàm d. Et
hypoth. quoniam a, c, e, g sunt harmonicè dispositi, & est

def.13b | a, maior, quàm c; ergo & e, maior est, quàm g;
82. h. | item f, quàm h; & b, quàm d. & est a ad e ratio
def.p.4. | altior, ideoque maior, quàm e ad g; & e ad g, altior, & maior, quàm f ad h; & f ad h, altior, & maior, quàm b ad d.

83. h. | Ergo a ad c maior est, quàm vt $a+e+f$ ad $c+g+h$. Quod &c. Et est $a+e+f$ ad $c+g+h$ maior, quàm $e+f$ ad $g+h$: & $e+f$ ad $g+h$ maior, quàm $e+f+b$ ad $g+h+d$: ergo $a+e+f$ ad $c+g+h$, est maior, quàm $e+f+b$ ad $g+h+d$. Quod &c. Et est $e+f+b$ ad $g+h+d$, maior, quàm b ad d. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 79. Prop. 91.

SI quatuor quantitatum prima ad secundam maior fuerit, quàm tertia ad quartam: productus extremarum, maior est producto mediarum.

Hypoth.

a; b: maior, quàm c; d.

Dico ad: maiorem esse, quàm bc.

Præpar.

Fiat productus bd.

Demonstr.

9. h. | ad; bd: a; b.
9. h. | bc; bd: c; d.
hypoth. | a; b: maior, quàm c; d.

ad;

13. 5. | *ad*; *bd*: maior, quàm *bc*; *bd*.
10. 5. | *ad*: maior, quàm *bc*. Quod &c.
Quare &c.

Theor. 80. *Prop.* 92.

SI quatuor quantitatum productus extremarum maior fuerit producto mediarum: erit prima ad secundam maior, quàm vt tertia ad quartam.

Hypoth.

Sunt quatuor quantitates *a*, *b*, *c*, *d*: & est *ad* maior, quàm *bc*.

Dico *a*; *b*; maiorem esse, quàm *c*; *d*.

Præpar.

Assumatur productus *bd*.

Demonstr.

hypoth. | *ad*: maior, quàm *bc*.
8. 5. | *ad*; *bd*: maior, quàm *bc*; *bd*.
9. *h*. | *ad*; *bd*: *a*; *b*.
9. *h*. | *bc*; *bd*: *c*; *d*.
13. 5. | *a*; *b*: maior, quàm *c*; *d*. Quod &c.
Quare &c.

Theor. 81. *Prop.* 93.

SI fuerit prima ad secundam, maior, quàm vt tertia ad quartam: fuerit autem & tertia ad quartam maior, quàm vt quinta ad sextam: item quinta ad sextam maior fuerit, quàm vt septima ad octauam: erit composita prima

cum

cum tertia, ad compositam secundam cum quarta, maior, quàm vt composita quinta cum septima, ad compositam sextam cum octaua.

Hypoth.

a	*b*
c	*d*
e	*f*
g	*h*

a; *b*: maior, quàm *c*; *d*.
c; *d*: maior, quàm *e*; *f*.
e; *f*: maior, quàm *g*; *h*.
Dico *a*+*c*; *b*+*d*: maiorem, quàm *e*+*g*; *f*+*h*.

Præpar.

Fiant producti *af*, *ah*, *cf*, *ch*, *be*, *bg*, *de*, *dg*.

Demonstr.

29. *h.* { *af*+*ah*: productus *a* per *f*+*h*.
cf+*ch*: productus *c* per *f*+*h*.
af+*ah*+*cf*+*ch*: productus *a*+*c* per *f*+*h*.
be+*bg*: productus *b*, per *e*+*g*.
de+*dg*: productus *d*, per *e*+*g*.
be+*bg*+*de*+*dg*, productus *b*+*d*, per *e*+*g*.

hypoth. | *a*; *b*: maior, quàm *c*; *d*.
hypoth. | *c*; *d*: maior, quàm *e*; *f*.
13. 5. | *a*; *b*: maior, quàm *e*; *f*.
hypoth. | *e*; *f*: maior, quàm *g*; *h*.
13. 5. | *a*; *b*: maior, quàm *g*; *h*.
13. 5. | *c*; *d*: maior, quàm *g*; *h*.

af:

93. b. { *af*: maior, quàm *be*.
ah: maior, quàm *bg*.
cf: maior, quàm *de*.
ch: maior, quàm *dg*. }

| *af+ah+cf+ch*: maior, quàm *be+bg+de+dg*.
94. b. | *a+c*; *b+d*: maior, quàm *e+g*; *f+h*. Quod &c.
Quare &c.

Theor. 82. *Prop.* 94.

SI fuerint è ſerie harmonica naturali ab vnitate, quatuor termini harmonicè diſpoſiti; & alij quatuor eorum ſubmultipli: inter ſimplos terminos altioris rationis hyperlogarithmus, ad hyperlogarithmum depreſſioris, maiorem habebit rationem, quàm inter ſubmultiplos. hypologarithmus verò inter ſimplos altioris, ad inter ſimplos depreſſioris, minorem habebit, quàm inter ſubmultiplos.

Hypoth.

1(3) 1(4) 1(5) 1(6)
1(6) 1(7) 1(8) 1(9) 1(10) 1(11) 1(12)

1(7) 1(8) 1(9) 1(10)
1(14) 1(15) 1(16) 1(17) 1(18) 1(19) 1(20)

| Sint è ſerie harmonica naturali ab vnitate, quatuor termini harmonicè diſpoſiti 1(3), 1(6), 1(7), 1(10): quorum 1(3), maior, quàm 1(6): ideo-

1(3)		1(4)		1(5)		1(6)
1(6)	1(7)	1(8)	1(9)	1(10)	1(11)	1(12)

1(7)		1(8)		1(9)		1(10)
1(14)	1(15)	1(16)	1(17)	1(18)	1(19)	1(20)

def.13b ideoq; & 1(7), maior, quàm 1(10). & esto altior ratio 1(3) ad 1(6), quàm 1(7) ad 1(10: ideo-
def p.4. que etiam maior. sint autem & istorum æque-
36. b. submultipli, 1(6), 1(12), 1(14), 1(20), pa-
15. 5. riter harmonicè dispositi, & æquè cum prædictis proportionales. Sumantur etiam inter 1(3), 1-(6) medij omnes harmonici 1(4), 1(5): & inter 1(7), 1(10), medij omnes 1(8) 1(9); quorum æquesubmultipli 1(8), 1(10), 1(16), 1(18).
def.16b Constat quod sicut 1(3), 1(4), 1(5), 1(6), &
def.19b similiter 1(7), 1(8), 1(9), 1(10) harmonicè sunt ordinati, sic 1(6), 1(8), 1(10), 1(12), &
15.5. similiter 1(14), 1(16), 1(18), 1(20) sunt harmonicè ordinati, & æquè cum prædictis proportionales. Deinde inter 1(6), 1(12), & inter 1(14), 1(20) sumantur omnes reliqui medij harmonici 1(7), 1(9), 1(11), & 1(15), 1(17), 1(19).

Dico primò 1(3)+1(4)+1(5) ad 1(7)+1(8)+1(9) maiorem esse, quàm 1(6)+1(7)+1(8)+1(9)+1(10)+1(11) ad 1(14)+1(15)+1(16)+1(17)+1(18)+1-(19).

De-

Demonstr.

sup. 1(3); 1(7): 1(6); 1(14).
88. *b.* 1(6); 1(14): maior, quàm 1(7); 1(15).
89. *b.* 1(6); 1(14): maior, quàm 1(6)+1(7); 1(14) +1(15).
13. 5. 1(3); 1(7): maior, quàm 1(6)+1(7); 1(14) +1(15).

Similiter demonstrabitur.

sup. 1(4); 1(8): maior, quàm 1(8)+1(9); 1(16) +1(17). Et
sup. 1(5); 1(9): maior, quàm 1(10)+1(11); 1(18) +1(19).
89. *b.* 1(6)+1(7); 1(14)+1(15): maior, quàm 1(8); 1(16).
sup. 1(8); 1(16): 1(4); 1(8).
13. 5. 1(6)+1(7); 1(14)+1(15): maior, quàm 1(4); 1(8).

Similiter demonstrabitur.

sup. 1(8)+1(9); 1(16)+1(17): maior, quàm 1(5); 1(9). Et
sup. 1(6)+1(7)+1(8)+1(9); 1(14)+1(15)+1(16)+1(17): maior, quàm 1(5); 1(9).
93. *b.* 1(3)+1(4); 1(7)+1(8): maior, quàm 1(6)+1(7)+1(8)+1(9); 1(14)+1(15)+1(16) +1(17).

Similiter demonstrabitur.

93. *b.* 1(3)+1(4)+1(5); 1(7)+1(8)+1(9): maior,

$$\frac{1(3) \quad 1(4) \quad 1(5) \quad 1(6)}{1(6)\ 1(7)\ 1(8)\ 1(9)\ 1(10)\ 1(11)\ 1(12)} \qquad \frac{1(7) \quad 1(8) \quad 1(9) \quad 1(10)}{1(14)\ 1(15)\ 1(16)\ 1(17)\ 1(18)\ 1(19)\ 1(20)}$$

quàm $1(6)+1(7)+1(8)+1(9)+1(10)+1(11)$; $1(14)+1(15)+1(16)+1(17)+1(18)+1(19)$. Quod &c.

Dico secundò $1(4)+1(5)+1(6)$; $1(8)+1(9)+1(10)$: maiorem esse, quàm $1(7)+1(8)+1(9)+1(10)+1(11)+1(12)$; $1(15)+1(16)+1(17)+1(18)+1(19)+1(20)$.

Demonstr.

89. h. { $1(7)+1(8)$; $1(15)+1(16)$: maior, quàm $1(4)$; $1(8)$.
$1(4)$; $1(8)$: maior, quàm $1(9)+1(10)$; $1(17)+1(18)$.
$1(9)+1(10)$; $1(17)+1(18)$: maior, quàm $1(5)$; $1(9)$. }

93. h. $1(7)+1(8)+1(9)+1(10)$; $1(15)+1(16)+1(17)+1(18)$: maior, quã $1(4)+1(5)$; $1(8)+1(9)$.

89. h. $1(4)+1(5)$; $1(8)+1(9)$: maior, quàm $1(11)+1(12)$; $1(19)+1(20)$.

89. h. $1(11)+1(12)$; $1(19)+1(20)$: maior, quàm $1(6)$; $1(10)$.

93. h. $1(7)+1(8)+1(9)+1(10)+1(11)+1(12)$; $1(15)+1(16)+1(17)+1(18)+1(19)+1(20)$: maior, quã $1(4)+1(5)+1(6)$; $1(8)+1(9)+1(10)$.

Quod

Quod è conuerso est demonstrandum.

Quare &c.

Theor. 83. *Prop.* 95.

SI fuerint eiusdem rationis duo hyperlogarithmi, alter ex paucioribus, alter ex terminis vno pluribus; & submultiplicati fuerint vtrorumque termini, per alterius multitudinem terminorum: submultipli eius, qui ex paucioribus, & submultipli eius, qui ex pluribus, primi sunt ęquales; & reliqui deinceps sunt minores, hoc ordine; secundus eius, qui ex pluribus; & secundus eius, qui ex paucioribus; & tertius eius, qui ex pluribus; & tertius eius, qui ex paucioribus; & sic deinceps. Quod si fuerint hypologarithmi: submultipli eius, qui ex paucioribus, & submultipli eius, qui ex pluribus, vltimi sunt æquales; & reliqui deinceps sunt maiores, hoc ordine; penultimus eius, qui ex pluribus; & penultimus eius, qui ex paucioribus; & triultimus eius, qui ex pluribus; & triultimus eius, qui ex paucioribus; & sic deinceps.

Hypoth.

1(*a*)		1(*b*)	1(*c*)
1(*d*)	1(*e*)	1(*f*)	1(*g*)
1(3*a*)		1(3*b*)	1(3*c*)
1(2*d*)	1(2*e*)	1(2*f*)	1(2*g*)

Sint earumdem rationum 1(*a*), ad 1(*c*), & 1(*d*) ad 1(*g*) duo hyperlogarithmi; vnus ex duobus terminis 1(*a*), 1(*b*);

 alter

1(a)		1(b)	1(c)
1(d)	1(e)	1(f)	1(g)
1(3a)		1(3b)	1(3c)
1(2d)	1(2e)	1(2f)	1(2g)

alter ex tribus 1(d), 1(e), 1(f): item duo hypologarithmi, ex duobus 1(b), 1(c), & ex tribus 1(e), 1(f), 1(g). & subtripli accipiantur 1(3a), 1(3b), 1(3c), necnon subdupli 1(2d), 1(2e), 1(2f), 1(2g).

Dico 1(3a), 1(2d) esse æquales: necnon 1(3c), 1(2g) esse æquales: & hoc ordine, priores maiores esse, & posteriores minores 1(3a), 1(2e), 1(3b), 1(2f), 1(3c).

Demonstr.

24. *b.*	1(a); 1(c): 1(d); 1(g): c; a: g; d
p. p.	c; g: a; d: c—a; g—d.
27. *b.*	c—a: 2. g—d: 3.
11. 5.	c; g: a; d: 2; 3.
31. *b.*	3c: 2g. 3a: 2d.
10. *b.*	1(3c): 1(2g). 1(3a): 1(2d). Quæ &c.
6. *b.*	2g—2f: 2f—2e: 2e—2d: 2.
6. *b.*	3c—3b: 3b—3a: 3.
	3a, 2e, 3b, 2f, 3c sunt, hoc ordine, minores, & deinceps maiores.
10. *b.*	1(3a), 1(2e), 1(3b), 1(2f), (13c) sunt, hoc ordine, maiores, & deinceps minores. Quod &c.

Quare &c.

Theo-

Theor. 84. Prop. 96.

SI fuerint è ſerie harmonica naturali ab vnitate, quatuor termini harmonicè diſpoſiti; & alij quatuor eorum ſubdupli; alijque ſubtripli; & ſubquadrupili, & ſic deinceps in infinitum: inter ſimplos terminos altioris, rationis hyperlogarithmus ad hyperlogarithmum depreſſioris maiorem habet rationem, quàm inter ſubduplos: & inter ſubduplos, maiorem, quàm inter ſubtriplos; & ſic deinceps. hypologarithmus verò inter ſimplos altioris, ad inter ſimplos depreſſioris, minorem habet rationem, quàm inter ſubduplos; & inter ſubduplos, minorem, quàm inter ſubtriplos; & ſic deinceps.

Hypoth.

1(3) 1(4) 1(5) 1(16)
1(6) 1(7) 1(8) 1(9) 1(10) 1(11) 1(12)
1(9) 1(10) 1(11) 1(12) 1(13) 1(14) 1(15) 1(16) 1(17) 1(18)

1(7) 1(8) 1(9) 1(10)
1(14) 1(15) 1(16) 1(17) 1(18) 1(19) 1(20)
1(21) 1(22) 1(23) 1(24) 1(25) 1(26) 1(27) 1(28) 1(29) 1(30)

Sint è ſerie harmonica naturali ab vnitate, quatuor termini harmonicè diſpoſiti 1(3), 1(6), 1(7), 1(10); quorum 1(3) maior, quàm 1(6); ideoque, & 1(7) maior, quàm 1(10). Et eſto altior ratio 1(3) ad 1(6), quàm 1(7) ad 1(10). Sint autem iſtorum ſubdupli 1(6), 1(12), 1(14), 1(20): & ſubtripli 1(9), 1(18), 1(21), 1(30). inter quos accipiantur medij harmonici, & ex his Hyperloga-

1(3) 1(4) 1(5) 1(16)
1(6) 1(7) 1(8) 1(9) 1(10) 1(11) 1(12)
1(9) 1(10) 1(11) 1(12) 1(13) 1(14) 1(15) 1(16) 1(17) 1(18)

1(7) 1(8) 1(9) 1(10)
1(14) 1(15) 1(16) 1(17) 1(18) 1(19) 1(20)
1(21) 1(22) 1(23) 1(24) 1(25) 1(26) 1(27) 1(28) 1(29) 1(30)

logarithmi, & Hypologarithmi.

94. h. Conſtat primò, quòd inter ſimplos, maior eſt hyperlogarithmus altioris, ad hyperlogarithmum depreſſioris, quàm inter ſubduplos: & hypologarithmus minor.

Dico 1(6)+1(7)+1(8)+1(9)+1(10)+1(11); 1(14) +1(15)+1(16)+1(17)+1(18)+1(19): maiorem eſſe, quàm 1(9)+1(10)+1(11)+1(12)+1(13)+1(14)+1(15)+1(16)+1(17); 1(21)+1(22)+1(23)+1(24)+1(25)+1(26)+1(27)+1(28)+1(29).

Præpar.

Sumantur ipſorum 1(6), 1(7), 1(4), 1(5) ſubtripli: & 1(9), 1(10), 1(11), 1(21), 1(22), 1(23) ſubdupli.

Demonſtr.

95. h. 1(18), 1(20), 1(21), 1(22) ſunt maiores, & deinceps minores.

95. h. 1(42), 1(44), 1(45), 1(46) ſunt maiores, & deinceps minores.

40. h. 1(18), 1(20), 1(21), 1(22), & 1(42), 1(44), 1(45), 1(46) ſunt ſimiliter harmonicè diſpoſiti.

1(18),

88. *h.* { 1(18); 1(42): maior, quàm 1(20); 1(44).
1(20); 1(44): maior, quàm 1(21); 1(45).
1(21); 1(45): maior, quàm 1(22); 1(46). }

36. *h.* { 1(18), 1(22), 1(42), 1(45) similiter proportionales, atque 1(6), 1(7), 1(14), 1(15).
1(18), 1(20), 1(22), 1(42), 1(44), 1(46) similiter proportionales, atque 1(9), 1(10), 1(11), 1(21), 1(22), 1(23). }

89. *h.* 1(6); 1(14): maior, quã 1(9)+1(10); 1(21)+1(22).

89. *h.* 1(9)+1(10); 1(21)+1(22): maior quàm 1(7); 1(15).

13. 5. 1(7); 1(15): maior, quàm 1(11; 1(23).

sup. { 1(11); 1(23): maior, quàm 1(8); 1(16).
1(8); 1(16): maior, quàm 1(12)+1(13); 1(24)+1(25).
1(12)+1(13); 1(24)+1(25): maior, quàm 1(9); 1(17).
Et sic deinceps quoad fuerint termini. }

93. *h.* 1(6)+1(7)+1(8)+1(9)+1(10+1(11); 1(14)+1(15+1(16)+1(17)+1(18)+1(19): maior, quã 1(9)+1(10)+1(11)+1(12)+1(13)+1(14)+1(15)+1(16)+1(17); 1(21)+1(22)+1(23)+1(24)+1(25)+1(26)+1(27)+1(28)+1(29). Quod &c.

Dico etiam 1(7)+1(8)+1(9)+1(10)+1(11)+1(12); 1(15)+1(16)+1(17)+1(18)+1(19)+1(20): minorem esse, quàm 1(10)+1(11)+1(12)+1(13)+1(14)+(15)+1(16)

1(3) 1(4) 1(5) 1(6)
1(6) 1(7) 1(8) 1(9) 1(10) 1(11) 1(12)
1(9) 1(10) 1(11) 1(12) 1(13) 1(14) 1(15) 1(16) 1(17) 1(18)

1(7) 1(8) 1(9) 1(10)
1(14) 1(15) 1(16) 1(17) 1(18) 1(19) 1(20)
1(21) 1(22) 1(23) 1(24) 1(25) 1(26) 1(27) 1(28) 1(29) 1(30)

+1(16)+1(17)+(1(18); 1(22)+1(23)+1(24)+1(25)
+1(26)+1(27)+1(28)+1(29)+1(30).

Demonstr.

1(10); 1(22): maior, quàm 1(7); 1(15).
1(7); 1(15): maior, quàm 1(11)+1(12); 1(13)
+1(14).
sup. 1(11)+1(12); 1(23)+1(24): maior, quàm 1(8); 1(16).
1(8); 1(16): maior, quàm 1(13); 1(25).
Et ſic deinceps, quoad fuerint termini.

93. b. 1(10)+1(11)+1(12)+1(13)+1(14)+1(15)+1(16)+1(17)+1(18); 1(22)+1(23)+1(24)+1(25)+1(26)+1(27)+1(28)+1(29)+1(30): maior, quàm 1(7)+1(8)+1(9)+1(10)+1(11)+1(12); 1(15)+1(16)+1(17)+1(18)+1(19)+1(20). Quod è conuerſo &c.

Quare &c.

Theo-

Theor. 85. Prop. 97.

EIusdem rationis numerosæ inter maiores terminos, maior est hyperlogarithmus ad hypologarithmum, quàm inter minores.

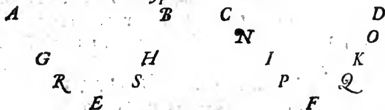
Demonstr.

Nàm sunt maiores, & deinceps minores, hoc
54. b. ordine, hyperlogarithmus inter maiores termi-
57. b. nos, hyperlogarithmus inter minores, hypologa-
56. b. rithmus inter minores, & hypologarithmus inter
8. 5. maiores. Quare inter maiores, hyperlogarithmus ad hypologarithmum, maior est, quàm inter minores.

Theor. 86. Prop. 98.

E Serie harmonica naturali ab vnitate, terminorum harmonicè dispositorum, altioris rationis logarithmus ad logarithmum depressioris, minor est, quàm vt hyperlogarithmus ad hyperlogarithmum; & maior, quàm vt hypologarithmus ad hypologarithmum.

Hypoth. commun.



Sint è serie harmonica naturali ab vnitate, quatuor termini *A, B, C, D,* harmonicè dispositi: quorum ratio *A*

A B C D
N O
G H I K
R S P Q
E F

ad *B*, altior, quàm *C* ad *D*. Et sit rationis *A* ad *B*, logarithmus *E*: & rationis *C* ad *D*, logarithmus *F*. Sint autem inter *A*, *B*, *C*, *D*, vel inter æqueproportionales numerosos terminos hyperlogarithmi, & hypologarithmi: rationis quidem *A* ad *B*, hyperlogarithmus *G*, & hypologarithmus *H*: & rationis *C* ad *D*, hyperlogarithmus *I*, & hypologarithmus *K*.

Dico *E* ad *F* minorem esse, quàm *G* ad *I*; maiorem, quàm *H* ad *K*.

Præpar.

Esto, si potest, *E* ad *F*, maior, quàm *G* ad *H*: & sumatur *L* ad *M* ratio, quæ cum ratione *G* ad *H*, componit rationem, *E* ad *F*. Et quoniam minor, quàm *E*, est ad *F*, vt *G* ad *H*: *L* ad *M*, est vt *E* ad minorem, quàm *E*: quare *L*,
62. b. maior est, quàm *M*. Inueniatur rationis *C* ad *D* hyperlogarithmus *N*, qui sit minor ad hypologarithmum *O*, quàm vt *L* ad *M*. Quod si termini, inter quos censentur *N*, *O*, non sunt minores, quàm inter quos *H*, *K*; sumantur alij minores æqueproportionales ad *C*, *D*, necnon alij æque-

æqueproportionales ad *A*, *B*: inter quos rationis quidem *C* ad *D* sint hyperlogarithmus *P*, & hypologarithmus *Q*; & rationis *A* ad *B* hyperlogarithmus *R*, & hypologarithmus *S*.

Demonstr.

96. *h.* | *R*; *P*: minor est, quàm *G*; *H*.
97. *h.* | *P*; *Q*: minor, quàm *N*; *O*: & minor, quàm *L*; *M*.
4. 3. | *R*; *Q*: minor, quàm *G*; *H*,+*L*; *M*.
suppos. | *E*; *F*: *G*; *H*,+*L*; *M*.
13. 5. | *R*; *Q*: minor, quàm *E*; *F*. *contra* 83. *h.*

Ergo *E* ad *F*, non est maior, quàm *G* ad *H*.

Præpar.

Esto *E* ad *F*, eadem, quæ *G* ad *H*, si potest: & inter minores terminos, quàm quos inter sunt hyperlogarithmi *G*, *H*, sumantur alij *R*, *P*.

Demonstr.

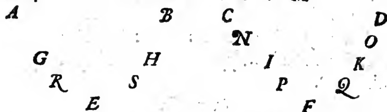
96. *h.* | *G*; *H*: maior, quàm *R*; *P*.
suppos. | *E*; *F*: *G*; *H*.
13. 5. | *E*; *F*: maior, quàm *R*; *P*. *contra demonstrata superiùs*.

Ergo *E* ad *F*, non est, vt *G* ad *H*.

Ergo *E* ad *F*, est minor, quàm vt *G* ad *H*. Quod &c.

Præpar.

Esto deinde *E* ad *F*, minor, quàm *I* ad *K*: & sumatur *L* ad *M* ratio, quæ cum *E* ad *F*, rationem *I* ad *K* componit. Et quoniam maior, quàm *E*, ad *F*, est vt *I* ad *K*: *L* ad *M*, est vt maior, quàm *E*, ad *E*: & *L*, maior



ior est, quàm *M*. Deinde fiant eadem, quæ supra.

Demonstr.

82. *h.*	*S*; *P*: minor est, quàm *E*; *F*.
præpar.	*P*; *Q*: minor, quàm *L*; *M*.
4. 3.	*S*; *Q*: minor, quàm *E*; *F*,+*L*; *M*.
suppos.	*I*; *K*: *E*; *F*,+*L*; *M*.
13. 5.	*S*; *Q*: minor, quàm *I*; *K*. *contra* 96. *h*.

Præpar.

Ergo *E* ad *F* non est minor, quàm *I* ad *K*.

Præpar.

Esto *E* ad *F*, eadem, quæ *I* ad *K*: & inter minores terminos, quàm quos inter sunt hypologarithmi *I*, *K*, sumantur alij *S*, *Q*.

Demonstr.

suppos.	*E*; *F*: *I*; *K*.
96. *h.*	*I*; *K*: minor est, quàm *S*; *Q*.
13. 5.	*E*; *F*: minor, quàm *S*; *Q*. *contra superiùs demonstrata*.

Ergo *E* ad *F*, non est eadem, quæ *I* ad *K*.
Ergo *E* ad *F*, est maior, quàm *I* ad *K*. Quod &c.
Quare &c.

Theor. 87. *Prop.* 99.

QVatuor terminorum è serie harmonica naturali ab vnitate dispositorum harmonicè, altioris rationis maior terminus ad maiorem depressioris, maior est, quàm vt logarithmus ad logarithmum: & logarithmus ad logarithmum, maior, quàm vt minor ad minorem.

Hypoth.

Sint è serie harmonica naturali ab vnitate, quatuor termini *a*, *b*, *c*, *d*, harmonicè dispositi: quorum ratio *a* ad *b*, altior, quàm *c* ad *d*: & *a*, maior, quàm *b*: ideoque etiam *c*, maior, quàm *d*. Et esto rationis *a* ad *b*, logarithmus *e*: & rationis *c* ad *d*, logarithmus *f*.

Dico *a*; *c*: maiorem, quàm *e*; *f*.

Et *e*; *f*: maiorem, quàm *b*; *d*.

Præpar.

Rationis *a* ad *b*, sumantur hyperlogarithmus *g*, & hypologarithmus *h*: & rationis *c* ad *d*, hyperlogarithmus *l*, & hypologarithmus *m*.

Demonstr.

90. *b.* | *a*; *c*: maior, quàm *g*; *l*.
98. *b.* | *g*; *l*: maior, quàm *e*; *f*.
98. *b.* | *e*; *f*: maior, quàm *h*; *m*.
90. *b.* | *h*; *m*: maior, quàm *b*; *d*.
13. 5. | *a*; *c*: maior, quàm *e*; *f*. Quod &c.
13. 5. | *e*; *f*: maior, quàm *b*; *d*. Quod &c.

Quare &c.

Theo-

Theor. 88. *Prop.* 100.

QVatuor numerorum arithmeticè diſpoſitorum, ratio primi ad ſecundum, totuplicata, quotus eſt primus, maior eſt, quàm tertij ad quartum totuplicata, quotus eſt quartus: atque totuplicata ratio primi ad ſecundum, quotus eſt ſecundus, minor eſt, quàm totuplicata tertij ad quartum, quotus eſt tertius.

Hypoth.

Sint quatuor numeri arithmeticè diſpoſiti *a*, *b*, *c*, *d*.

Dico rationem *a* ad *b* totuplicatam, quotus eſt *a*, maiorem eſſe, ratione *c* ad *d*, totuplicata, quotus eſt *d*: & rationem *a* ad *b* totuplicatam, quotus eſt *b*, minorem eſſe, ratione *c* ad *d* totuplicata, quotus eſt *c*.

Præparatio.

Sumantur in ſerie harmonica naturali ab vnitate termini æquecordinati cum numeris *a*, *b*, *c*, *d*, in ſerie arithmetica naturali: nempe vnitates denominatæ ab ipſis: 1(*a*), 1(*b*), 1(*c*), 1(*d*). Et eſto rationis *c* ad *b*, logarithmus *e*: & rationis *c* ad *d*, logarithmus *f*.

Demonſtr. p.

Terminus *a*, vel minor eſt, vel maior, quàm *b*: & rurſum *a*, vel minor eſt, vel maior, quàm *c*. Eſto *a*, minor, quàm *b*: & minor, quàm *c*.

hypoth.	*a*, *b*, *c*, *d*: arithmeticè diſpoſiti.
14. *h.*	1(*a*), 1(*b*), 1(*c*), 1(*d*): harmonicè diſpoſiti.
ſup.	1(*a*): maior, quàm 1(*b*): & maior, quàm 1(*c*).
88. *h.*	1(*a*); 1(*b*): altior, & maior, quàm 1(*c*); 1(*d*).

1(*a*);

65. h. | $1(a); 1(b)$: logarithmus e.
65. h. | $1(c); 1(d)$: logarithmus f.
12. h. | $1(a)$: maior, quàm $1(b)$.
def. 13 h. | $1(c)$: maior, quàm $1(d)$.
8. 5. | $1(a); 1(d)$: maior, quàm $1(a); 1(c)$.
99. h. | $1(a); 1(c)$: maior, quàm $e; f$.
99. h. | $e; f$: maior, quàm $1(b); 1(d)$.
8. 5. | $1(b); 1(d)$: maior, quàm $1(b); 1(c)$.
13. 5. | $1(a); 1(d)$: maior, quàm $e; f$.
13. 5. | $e; f$: maior, quàm $1(b); 1(c)$.
12. h. | $1(a); 1(d)$: $d; a$.
12. h. | $1(b); 1(c)$: $c; b$.
13. 5. | $d; a$: maior, quàm $e; f$.
13. 5. | $e; f$: maior, quàm $c; b$.
91. h. | df: maior, quàm ae.
91. h. | cb: maior, quàm fc.

hypoth. | Et quoniam f, logarithmus est rationis c ad d:
73. h. | ergo df, logarithmus est rationis c ad d, totu-
hypoth. | plicatæ, quotus est d. item quoniam e, logari-
73. h. | thmus est rationis a ad b: ergo ae, logarithmus
est rationis a ad b totuplicatæ, quotus est e. Et
74. h. | vt ae ad df, ita est ratio a ad b totuplicata, quo-
[illegible] | tus est a, ad rationem c ad d totuplicatam quo-
71. h. | tus est d. est autem ae, minor, quàm df: ergo ra-
[illegible] | tio a ad b totuplicata, quotus est a, depressior
hypoth. | est ratione c ad d totuplicata, quotus est d. est
def. 5. h. | autem a minor, quàm b; & c, minor, quàm d:

Ergo

def.2.4. Ergo maior est ratio *a* ad *b* totuplicata, quotus est *a*, quàm *c* ad *d* totuplicata, quotus est *d*. Quod &c.

73. *h.* Similiter ostendetur, quod *eb*, logarithmus est rationis *a* ad *b*, totuplicatæ, quotus est *b*: & *fc* *sup.* logarithmus *c* ad *d* totuplicatæ, quotus est *c*: sed 71. *h.* est *eb*, maior, quàm *fc*: ergo ratio *a* ad *b* totuplicata quotus est *b*, altior est, quàm *c* ad *d* totu- *hypoth.* plicata quotus est *c*. & est *a* minor, quàm *b*; & *def.5.h.* *c* minor, quàm *d*: ergo minor est ratio *a* ad *b* to- *def.p.4.* tuplicata, quotus est *b*, quàm ratio *c* ad *d* totuplicata, quotus est *c*. Quod &c.

Demonstr.2.

Esto *a*, minor, quàm *b*: & maior, quàm *c*. *hypoth.* ergo *c*, *d*, *a*, *b*, sunt quatuor numeri arithmeticè *def.5.h.* dispositi; quorum *c*, minor est, quàm *d*; & mi- *sup.* nor, quàm *a*. Et ratio *c* ad *d* totuplicata, quotus est *c*, maior est, quàm *a* ad *b* totuplicata, quotus est *b*: & *c* ad *d* totuplicata, quotus est *d*, minor, quàm *a* ad *b* totuplicata, quotus est *a*. Quod &c.

Demonstr.3.

Esto *a*, maior, quàm *b*, & minor, quàm *c*. *hypoth.* Ergo *b*, *a*, *d*, *c*, sunt quatuor numeri arithmeti- *def.5.h.* cè dispositi; quorum *b*, minor, quàm *a*; & mi- *sup.* nor, quàm *d*. Et ratio *b* ad *a* totuplicata, quotus est *b*, maior, quàm *d* ad *c* totuplicata, quotus

tus est *c*: & *b* ad *a* totuplicata, quotus est *a*, minor, quàm *d* ad *c* totuplicata, quotus est *d*. Et
2.3. conuertendo *a* ad *b* totuplicata, quotus est *a*, maior, quàm *c* ad *d*, totuplicata, quotus est *d*: & *a* ad *b* totuplicata, quotus est *b*, minor, quàm *c* ad *d* totuplicata, quotus est *c*. Quod &c.

Demonstr. 4.

Esto *a* maior vtrisque *b*, & *c*: eritque *d* minor vtrisque *c*, & *b*. Sunt ergo quatuor numeri *d*, *c*, *b*, *a* dispositi arithmeticè: quorum ratio *d* ad *c* totuplicata, quotus est *d*, maior, quàm *b* ad *a* totuplicata, quotus est *a*: & *d* ad *c* totuplicata, quotus est *c*, minor, quàm *b* ad *a* totuplicata, quotus est *b*. Et conuertendo, *c* ad *d* totuplicata, quotus est *d*, minor, quàm *a* ad *b* totuplicata, quotus est *a*: & *c* ad *d* totuplicata, quotus est *c*, maior, quàm *a* ad *b* totuplicata, quotus est *b*. Quod &c. Quare &c.

def.5.h. sup. — *2.3.*

Theor. 89. *Prop.* 101.

SI fuerint quatuor numeri arithmeticè dispositi, & primus maior secundo; fuerint autem & alij duo numeri, quintus ad sextum, maior quàm vt primus ad quartum: erit primi ad secundum totuplicata ratio, quotus est quintus, maior, quàm tertij ad quartum totuplicata ratio, quotus est sextus.

Hypoth.

Sint quatuor arithmeticè diſpoſiti numeri *a*, *b*,
def.5.h. *c*, *d*: & ſit primus *a*, maior ſecundo *b*; ideoque etiam tertius *c*, maior quarto *d*: & ſint alij duo, quintus *e* ad ſextum *f*, maior quàm *a* ad *d*.

Dico rationem *a* ad *b* totuplicatam, quotus eſt *e*, maiorem eſſe ratione *c* ad *d* totuplicata, quotus eſt *f*.

Præpar.

Rationis *a* ad *b*, logarithmus aſſumatur *g*: & rationis *c* ad *d*, logarithmus *h*.

Demonſtr.

100.h. Ratio *a* ad *b* totuplicata, quotus eſt *a*, maior eſt ratione *c* ad *d* totuplicata, quotus eſt *d*: &
hypoth. ambæ ſunt maioris inæqualitatis: ergo ratio *a* ad
def.p.4. *b* totuplicata, quotus eſt *a*, altior eſt, quàm *c* ad *d* totuplicata, quotus eſt *d*. Eſt autem rationis *a*
73.h. ad *b* totuplicatæ, quotus eſt *a*, logarithmus *ag*: & rationis *c* ad *d* totuplicatæ, quotus eſt *d*, loga-
hypoth. rithmus *hd*: ergo *ag* maior eſt, quàm *hd*. Et quo-
p.3. 9.h. niam *e* ad *f* maior eſt, quàm vt *a* ad *d*: permutando, *e* ad *a*, maior eſt, quàm vt *f* ad *d*. Sed *e* ad *a*, eſt vt *eg* ad *ag*: & *f* ad *d*, vt *fh* ad *dh*.
13.5. Ergo *eg* ad *ag*, maior eſt, quàm vt *fh* ad *dh*: &
p.3. permutando, *eg* ad *fh*, maior, quàm vt *ag* ad *dh*.
73.h. Et eſt *eg*, logarithmus rationis *a* ad *b* totuplicatæ, quotus eſt *e*: & *fh*, logarithmus rationis *c* ad
71.h. *d* totuplicatæ, quotus eſt *f*. ergo ratio *a* ad *b*

totu-

totuplicata, quotus est *e*, altior est ratione *c* ad *d*
hypoth. totuplicata, quotus est *f*. Et vtraque maioris est
def.p.4. inæqualitatis. Ergo ratio *a* ad *b* totuplicata, quotus est *e*, maior est ratione *c* ad *d* totuplicata, quotus est *f*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 90. Prop. 102.

SI fuerint quatuor numeri arithmeticè dispositi, & primus minor secundo; fuerint autem & alij duo numeri, quintus ad sextum, minor, quàm vt primus ad quartum: erit primi ad secundum totuplicata ratio, quotus est quintus, maior, quàm tertij ad quartum totuplicata ratio, quotus est sextus.

Hypoth.

Sint quatuor numeri arithmeticè dispositi, *a*, *b*,
def.5.b. *c*, *d*: & sit *a*, minor, quàm *b*: ideoque etiam *c*, minor, quàm *d*: & sit *e*, ad *f*, minor, quàm vt *a* ad *d*.

Dico *a* ad *b* totuplicatam rationem, quotus est *e*, maiorem esse ratione *c* ad *d* totuplicata, quotus est *f*.

Demonstr.

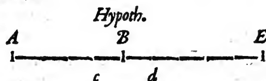
hypoth. Sunt enim *d*, *c*, *b*, *a*, arithmeticè dispositi: & est
2. 3. *d*, maior, quàm *c*: & *f* ad *e*, maior, quàm *d* ad *a*:
101. b. ergo *d* ad *c* totuplicata, quotus est, *f* maior est, quàm *b* ad *a* totuplicata, quotus est *e*: & conuer-
2. 3. tendo *c* ad *d* totuplicata, quotus est *f*, minor,

quàm *a* ad *b* totuplicata, quotus est *e*. Quod &c.
Quare &c.

Probl. 13. *Prop.* 103.

DAta quantitate, dataque ratione inæqualitatis, inuenire terminos in data ratione, quorum differentia est quantitas data.

Hypoth.



Sit data quantitas *A B*, dataque ratio *c* ad *d*: & esto *c*, maior, quàm *d*.

Oportet inuenire terminos in ratione *c* ad *d*, quorum excessus *A B*.

Constr.

Fiat *c—d*; *d*: *AB*; *BE*.
Dico *AE*; *EB*: *c*; *d*.

Demonstr.

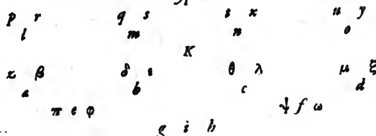
constr. | *AB*; *BE*: *c*—*d*; *d*.
2. p. | *AE*; *EB*: *c*; *d*. Quod &c.
Quare &c.

Theor. 91. *Prop.* 104.

SI quatuor quantitatum non numerosas rationes habentium, harmonicè dispositarum, prima maior fuerit, quàm vtralibet secunda, & tertia: logarithmus rationis pri-

primæ ad ſecundam ad logarithmum tertiæ ad quartam, non erit maior, quàm vt prima ad tertiam, nec minor, quàm vt ſecunda ad quartam.

Hypoth.



Sunto quatuor quantitates harmonicè diſpoſitæ, *a*, *b*, *c*, *d*: quarum *a*, maior, quàm *b*, & maior, quàm *c*. & ſunto *a* ad *b*, & *c* ad *d*, rationes non numeroſæ. & rationis *a* ad *b*, eſto logarithmus *e*: rationis autem *c* ad *d*, logarithmus *f*.

Dico *e* ad *f*, non maiorem eſſe, quàm vt *a* ad *b*; nec minorem, quàm vt *c* ad *d*.

Suppoſita falſa alternatiua.

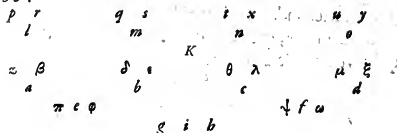
Eſto, ſi fieri poteſt, vel maior *e* ad *f*, quàm vt *a* ad *b*, ratione *g* ad *h*, maioris inæqualitatis, vel minor, quàm vt *c* ad *d*, ratione *g* ad *h*, maioris inæqualitatis.

Præpar.

Fiat *g*; *i*: *i*; *h*. Sumatur quantitas *K*.

Fiat *a*; *K*: *K*; *l*.
b; *K*: *K*; *m*.
c; *K*: *K*; *n*.
d; *K*: *K*; *o*.

Di-



77. b. Datis non numerosis rationibus *a* ad *b*, & *c* ad *d*, vel *m* ad *l*, & *o* ad *n*: dataque ratione *g* ad *i*, vel *i* ad *h*, maioris inæqualitatis, quatuor inueniantur numerosæ rationes, *p* ad *q*, altior, quàm *l* ad *m*; & *r* ad *s* depressior: propiores æqualitati logarithmicæ, quàm vt in ratione *g* ad *i*, vel *i* ad *h*.

88. b. Et quoniam *a* ad *b*, ratio est altior, quàm *c* ad
24. b. *d*: & sunt *l*, *m*, *n*, *o*, reciprocè, sicut *a*, *b*, *c*, *d*:
2. 3. etiam *l* ad *m*, ratio est altior, quàm *n* ad *o*. Itaq; si forte contingeret *r* ad *s*, non altior, quàm *n* ad
76. b. *o*: inueniatur altera *r* ad *s*, depressior quidem, quàm *l* ad *m*; sed ei propior; atque altior, quàm
76. b. *n* ad *o*. Et similiter inueniatur *t* ad *u*, depressior,
77. b. quàm *r* ad *s*; altior, quàm *n* ad *o*: necnon inueniatur *x* ad *y*, depressior, quàm *n* ad *o*; vt fiant *t* ad *u*, & *x* ad *y*, propiores æqualitati logarithmicæ, quàm vt in ratione *g* ad *i*, vel *i* ad *h*.

103. b. Dataque differentia *l*, *m*: datis quoque rationibus *p*, ad *q*, *r* ad *s*, *t* ad *u*, *x* ad *y*, inuenian-

tur

tur earumdem termini p, q, r, s, t, u, x, y, eaſdem habentes rationes, & eamdem differentiam l, m.

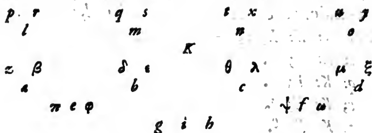
Fiat $p; K: K; \zeta$.
$r; K: K; \beta$.
$q: K: K; \delta$.
$s; K: K; \iota$.
$t; K: K; \theta$.
$x; K: K; \lambda$.
$u; K: K; \mu$.
$y; K: K; \xi$.

Et rationis ζ ad δ, logarithmus eſto π.
rationis β ad ι, logarithmus φ.
rationis θ ad μ, logarithmus ψ.
rationis λ ad ξ, logarithmus ω.

Demonſtr. commun.

hypoth. | a, b, c, d, ſunt harmonicè diſpoſitæ.
33. *h.* | l, m, n, o, arithmeticè diſpoſitæ.
hypoth. | a, maior, quàm b: & maior, quàm c.
34. *h.* | l, minor, quàm m: & minor, quàm n.
conſtr. | $p, q; l, m; r, s; t, u; n, o; x, y$: binæ, & binæ ſunt arithmeticè diſpoſitę, antecedentes minores conſequentibus.
def 34. *h* | π: maior, quàm e. & e; maior, quàm φ.
| ψ: maior, quàm f. & f: maior, quàm ω.
conſtr. | Et quoniam g, ad i, maior eſt logarithmicè, quàm vt ratio ζ ad δ, ad rationem β ad ι: ratio
12. 4. | autem ζ ad δ, ad rationem β ad ι, logarithmicè

maior



81. b. maior est, quàm vt ad rationem *a* ad *b*: & ratio *z* ad *δ*, ad rationẽ *a* ad *b*, est logaritmicè, vt *π* ad
13.5. *e*: ergo *g* ad *i* est maior, quàm vt *π* ad *e*. Similiter ostendetur *g* ad *i*, maior, quàm *e* ad *φ*: & maior, quàm *ψ* ad *f*: & maior, quàm *f* ad *ω*.

constr. Deinde quoniam *p* ad *q*, vel *z* ad *δ* ratio est
sup. altior, quàm *l* ad *m*, vel *a* ad *b*; & sunt *z*, *δ*,
hypoth. *a*, *b* harmonicè dispositæ; & est *a*, maior, quàm
7.5. *b*: oportet *z*, & *δ* maiores esse, quàm *a*, *b*. si enim essent æquales; esset ratio *z* ad *δ*, æquealta rationi *a* ad *b*: si verò esset *z*, minor, quàm *a*;
def.13b ideoque & *δ*, minor, quàm *b*; esset ratio *z* ad *δ*,
88. b. depressior, quàm *a* ad *b*: contra assumptum. Similiter ostendetur, quòd *a*, maior est, quàm *β*; & *b*, quàm *ε*: item *θ*, maior, quàm *c*; & *μ*, quàm *d*: & *c*, quàm *λ*; & *d*, quàm *ξ*.

Suppositio falsa prima.

Esto *e* ad *f*, maior, quàm *a* ad *c*: si potest.

De-

Demonstr. p.

præpar. | e; f: a; c,+g; i,+i; h.
def.5.6. | e; φ,+φ; ψ,+ψ; f: e; f.
11. 5. | e; φ,+φ; ψ,+ψ; f: a; c,+g; i,+i; h.
sup. | e; φ: minor, quàm g; i.
sup. | ψ; f: minor, quàm i; h.
4. 3. | φ; ψ: maior, quàm a; c. si enim esset eadem, vel minor: esset e; f: minor, quàm a; c,+g; h. contra assumptum.

præpar. Sunt autem β, ι, θ, μ, harmonicè dispositæ
25. h. quantitates, numerosasque habentes rationes; & proportionales sicut quidam termini è serie har-
præpar. monica naturali ab vnitate: quorum rationis β ad ι, logarithmus est φ; & rationis θ ad μ, loga-
sup. rithmus est ψ. Est autem sicut r ad s ratio altior, quàm t ad u: sic β ad ι, altior, quàm θ ad μ: &
sup. est β, maior, quàm ι; ideoque & θ, maior,
99. h. quàm μ. Ergo β ad θ, maior est, quàm φ ad ψ.
13. 5. Ergo β ad θ, maior est, quàm a ad c, *contra* 8.5.

Ergo e ad f, non maior est, quàm a ad c. Quod &c.

Suppos. fals. 2.

Esto e ad f, minor, quàm b ad d, si potest.

Demonstr. 2.

præpar. | e; f,+g; h: b; d.
sup. | π; e: minor, quàm g; i.
sup. | f; ω: minor, quàm i; h.
sup. | π; ω: minor, quàm e; f,+g; h.

13. 5. π; ω: minor, quàm b; d.

Sunt autem ζ, δ; λ, ξ; harmonicè dispositæ,
præpar. numerosas rationes habentes; & proportionales,
25. b. sicut quidam termini è serie harmonica naturali
præpar. ab vnitate: quorum rationis ζ ad δ, logarithmus
est π; & rationis λ ad ξ, logarithmus est ω: &
sup. est ζ ad δ ratio altior, quàm a ad b; sicut p ad
q, altior, quàm l ad m: & l ad m altior, quàm
n ad o, vel c ad d: & c ad d, altior, quàm λ ad
ξ; sicut n ad o, altior, quàm x ad y: ergo ζ ad
δ, altior est, quàm λ ad ξ: & est ζ, maior, quàm
99. b. δ; & λ, maior, quàm ξ: Ergo π ad ω maior
13. 5. est, quàm δ ad ξ. Ergo δ ad ξ minor est, quàm
b ad d. *contra* 8. 5.

Ergo e ad f, non minor est, quàm b ad d. Quod &c. Quare &c.

Theor. 92. *Prop.* 105.

QVatuor arithmeticè dispositarum quantitatum, si prima ad vltimam, fuerit vt numerus ad numerum: erit primæ ad secandam totuplicata ratio, quotus est homologus primæ, maior, quàm tertiæ ad quartam totuplicata ratio, quotus est homologus quartæ. quòd si secunda ad tertiam fuerit vt numerus ad numerum: erit primæ ad secundam totuplicata ratio, quotus est homologus secundæ, minor, quàm tertię ad quartam totuplicata, quotus est homologus tertiæ.

Hy-

Hypoth.

Sunto quatuor arithmeticè diſpoſitæ quantitates *A*, *B*, *C*, *D*. & eſto, vel alterutrum, vel vtrumque iſtorum, videlicet: *A* ad *D*, vt numerus *a*, ad numerum *d*: & *B* ad *C*, vt numerus *b*, ad numerum *c*.

Dico rationem *A* ad *B* totuplicatam, quotus eſt *a*, maiorem eſſe ratione *C* ad *D* totuplicata, quotus eſt *d*: & rationem *A* ad *B* totuplicatam, quotus eſt *b*, minorem ratione *C* ad *D* totuplicata, quotus eſt *c*.

Præpar. commun.

Sumatur rationalis *u*: & per quantitates denominetur arithmeticè diſpoſitas, vt fiant fractiones
13.b. *u*(*A*), *u*(*B*), *u*(*C*), *u*(*D*), harmonicè diſpoſitæ. Sitque rationis *A* ad *B* logarithmus *e*: & rationis *C* ad *D*, logarithmus *f*.

Demonſtr. p.

Quantitatum *A*, *B*, *C*, *D*, vel duæ tantùm extremæ *A*, *D*, erunt vt numeri; vel duæ tantùm mediæ *B*, *C*: vel binæ tantùm extremæ inuicem *A*, *D*; & mediæ inuicem *B*, *C*: vel tres inuicem ſunt vt numeri.

4.8. Sunto tres inuicem *A*, *B*, *C*, vt numeri: & aſſumantur tres numeri *g*, *h*, *i* proportionales, vt
def.5.b. *A*, *B*, *C*: quod ſi *A*, minor eſt, quàm *B*; etiam *C*,
2.p. minor eſt, quàm *D*; & *g* minor, quàm *h*. & per homologiam, eſt defectus *g*, *h*, ad *i*, vt defectus *A*, *B*, ad *C*. addatur defectus *g*, *h*, numero *i*, &
2.p. fiat numerus *l*. erit ergo componendo vt *l* ad *i*,

def. 5. h. ita *D* ad *C*. Si verò *A*, maior est, quàm *B*: profectò *C*, maior est, quàm *C* --- *D*, vel quàm *A*
2. p. --- *B*: & per homologiam, sicut *C*, maior est, quàm *A* --- *B*, ita *i*, maior est, quàm *g* --- *h*. Auferatur itaque *g* --- *h*, ab *i* numero; & relinquatur *l*: &
2. p. erit, diuidendo, *C* ad *D*, vt *i* ad *l*.

Quare *A*, *B*, *C*, *D* sunt proportionales inuicem, vt numeri, *g*, *h*, *i*, *l*. & numeri *g*, *h*, *i*, *l*, sunt arithmeticè dispositi: quorum ratio *g* ad *h*
100. h. totuplicata, quotus est *g*, maior est, quàm ratio *i* ad *l* totuplicata, quotus est *l*: & ratio *g* ad *h* totuplicata, quotus est *h*, minor, quàm ratio *i* ad *l*
6. 4. totuplicata, quotus est *i*. Sed *g* ad *h* totuplicata ratio, quotus est *g*, ad camdem totuplicatam, quotus est *a*, est logarithmicè, vt *g* ad *a*: & *i* ad *l* totuplicata, quotus est *l*, est logarithmicè ad eamdem totuplicatam, quotus est *d*, vt *l* ad *d*. Et quoniam *g* ad *l* est vt *A* ad *D*: & *A* ad *D*, vt
11. 5. *a* ad *d*: ergo *g* ad *l*, est vt *a* ad *d*: & permutan-
2. p. 15. 4. do *g* ad *a*, vt *l* ad *d*. Ergo ratio *g* ad *h* totuplicata, quotus est g, ad eamdem totuplicatam, quotus est *a*, est vt *i* ad *l* totuplicata, quotus est *l*,
18. 4. ad eamdem totuplicatam, quotus est *d*. Ergo si *g* ad *h* totuplicata, quotus est *g*, altior est, quàm *i* ad *l* totuplicata, quotus est *l*, etiam *g* ad *h* totuplicata, quotus est *a*, altior est, quàm *i* ad *l* totuplicata, quotus est *d*: si depressior, depressior.

ergo

100.b. ergo ſicut g ad h totuplicata, quotus eſt g, maior eſt, quàm i ad l totuplicata, quotus eſt l; ſiue
def.5.b. ſint g ad h, & i ad l rationes maioris inæqualitatis,
deff. 1. & 2.4. ſiue ſint minoris ambæ: erit & g ad h totuplicata, quotus eſt a, maior, quàm i ad l totuplicata, quotus eſt d. Et eſt g ad h, eadem, quæ A ad B: & i ad l, eadem, quæ C ad D. ergo A ad B totuplicata ratio, quotus eſt a, maior eſt, quàm C ad D totuplicata, quotus eſt d. Quod &c.

Simili prorus demonſtratione oſtendetur, quòd ratio A ad B totuplicata, quotus eſt b, minor eſt, quàm C ad D totuplicata, quotus eſt c. Quod &c.

Demonſtr.2.

Sunto vel duo tantùm extremi A, D, vt numeri; vel duo tantùm medij C, D; vel bini, & bini A, D, & B, C; non autem tres, aut quatuor. profectò vel eſt quantitas A, minor, quàm B, vel maior: & rurſum quantitas A, minor, quàm C, vel maior.

Eſto A, minor, quàm B, & minor, quàm C.

14. b. $u(A)$, $u(B)$, $u(C)$, $u(D)$, ſunt harmonice diſpoſiti.
12. b. $u(A)$: maior, quàm $u(B)$.
12. b. $u(A)$: maior, quàm $u(C)$.
88. b. $u(A)$; $u(B)$: altior, & maior, quàm $u(C)$; $u(D)$.
78. b. $u(A)$; $u(B)$: logarithmus e.
78. b. $u(C)$; $u(D)$: logarithmus f.
def.13 b $u(C)$: maior, quàm $u(D)$.
8. 5. $u(A)$; $u(D)$: maior, quàm $u(A)$; $u(C)$.

$u(A)$;

104. *b.* *u(A)*; *u(C)*: non minor, quàm *e*; *f*.
104. *b.* *e*; *f*: non minor, quàm *u(B)*; *u(D)*.
8. 5. *u(B)*; *u(D)*: maior, quàm *u(B)*; *u(C)*.
13. 5. *u(A)*; *u(D)*; maior, quàm *e*; *f*.
13. 5. *e*; *f*: maior, quàm *u(B)*; *u(C)*.
12. *b.* *u(A)*; *u(D)*: *D*; *A*: *d*; *a*.
12. *b.* *u(B)*; *u(C)*: *C*; *B*: *c*; *b*.
13. 5. *d*; *a*: maior, quàm *e*; *f*.
13. 5. *e*; *f*: maior, quàm *c*; *b*.
91. *b.* *df*: maior, quàm *ae*.
91. *b.* *cb*: maior, quàm *fc*.

præpar. Et quoniam *f*, logarithmus eſt rationis *C* ad
80. *b.* *D*: ergo *df*, logarithmus eſt rationis *C* ad *D* totuplicatæ, quotus eſt *d*. item quoniam *e*, logarithmus eſt rationis *A* ad *B*: ergo *ae*, logarithmus eſt rationis *A* ad *B* totuplicatæ, quotus eſt *a*. Similiter *fc*, logarithmus eſt rationis *C* ad *D* totuplicatæ, quotus eſt *c*: & *eb*, logarithmus, ratio-
81. *b.* nis *A* ad *B* totuplicatæ, quotus eſt *b*. Sicut ergo *ae*, minor eſt, quàm *df*: ſic depreſſior eſt *A* ad *B* totuplicata, quotus eſt *a*, quàm *C* ad *D* totuplicata, quotus eſt *d*. Item ſicut *eb*, maior eſt, quàm *fc*: ſic *A* ad *B* totuplicata, quotus eſt *b*, altior eſt, quàm *C* ad *D* totuplicata, quotus eſt *c*.
hypoth. Sunt autem *A* ad *B*, & *C* ad *D*, minoris inæqua-
deff. 1. & litatis rationes, quarum depreſſior altiore maior
24. eſt. Ergo *A* ad *B* totuplicata, quotus eſt *a*, maior

ior est, quàm *C* ad *D* totuplicata, quotus est *d*: & *A* ad *B* totuplicata, quotus est *b*, minor, quàm *C* ad *D* totuplicata, quotus est *c*. Quod &c.

Demonstr. 3.

Esto *A* minor, quàm *B*, & maior, quàm *C*. Ergo *C*, *D*, *A*, *B*, sunt quatuor quantitates arithmeticè dispositè; quarum *C*, minor, quàm *D*, & minor, quàm *A*. Et ratio *C* ad *D* totuplicata, quotus est *c*, maior est, quàm *A* ad *B* totuplicata, quotus est *b*. & *C* ad *D* totuplicata, quotus est *d*, minor, quàm *A* ad *B* totuplicata, quotus est *a*. Quod &c.

def. 5. *h.*
sup.

Demonstr. 4.

Esto *A*, maior, quàm *B*, & minor, quàm *C*. Ergo *B*, *A*, *D*, *C*, sunt quatuor quantitates arithmeticè dispositæ, quarum *B* minor, quàm *A*; & minor, quàm *D*. ideoque *B* ad *A* totuplicata ratio, quotus est *b*, maior est, quàm *D* ad *C* totuplicata, quotus est *c*: & *B* ad *A* totuplicata, quotus est *a*, minor, quàm *D* ad *C* totuplicata, quotus est *d*. Ergo conuertendo, *A* ad *B* totuplicata, quotus est *b*, minor est, quàm *C* ad *D* totuplicata, quotus est *c*: & *A* ad *B* totuplicata, quotus est *a*, maior, quàm *C* ad *D* totuplicata, quotus est *d*. Quod &c.

def. 5. *h.*
sup.
2. 3.

Demonstr. 5.

Esto *A* maior, quàm *B*, & maior, quàm *C*. Ergo *D*,

C, *B*, *A*,

C, B, A, ſunt quantitates arithmeticè diſpoſitæ,
def.5.h. quarum D minor, quàm C, & minor, quàm B.
ſup. quarum ratio D ad C totuplicata, quotus eſt d, maior eſt, quàm B ad A totuplicata, quotus eſt a: & D ad C totuplicata, quotus eſt c, minor,
2.3. quàm B ad A totuplicata, quotus eſt b: Ergo conuertendo, C ad D totuplicata, quotus eſt d, minor eſt, quàm A ad B totuplicata, quotus eſt a: & C ad D totuplicata, quotus eſt c, maior, quàm A ad B totuplicata, quotus eſt b. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 93. Prop. 106.

SI fuerint quatuor quantitates arithmeticè diſpoſitæ, & prima minor ſecunda; fuerint autem & duo numeri prior ad poſteriorem, minor, quàm vt prima quantitas ad quartam: erit primæ ad ſecundam totuplicata ratio, quotus eſt prior numerus, maior, quàm tertiæ ad quartam totuplicata, quotus eſt poſterior.

Hypoth.

Sint quatuor quantitates arithmeticè diſpoſitæ, A, B, C, D: & ſit A, minor, quàm B: ideoque etiam C, minor, quàm D: & ſit e numerus ad numerum f, minor, quàm vt A ad D.

Dico A ad B totuplicatam, quotus eſt e, maiorem eſſe, quàm C ad D totuplicata, quotus eſt f.

Præ-

Præpar.

Denominetur *u*, per quantitates arithmeticè
13. *h*. dispositas *A*, *B*, *C*, *D*, vt fiant fractiones harmonicè dispositæ, *u*(*A*), *u*(*B*), *u*(*C*), *u*(*D*). Et esto rationis *u*(*A*) ad *u*(*B*), logarithmus *g*: & rationis *u*(*C*) ad *u*(*D*), logarithmus *h*.

Demonstr.

Vel *u*(*A*), maior est, quàm *u*(*C*); vel minor.
def. 13 *h*. Si *u*(*A*), maior est, quàm *u*(*C*): etiam *u*(*B*), ma-
88. *h*. ior est, quàm *u*(*D*): & *u*(*A*) ad *u*(*B*), ratio est al-
def. p. 4. tior, & maior, quàm *u*(*C*) ad *u*(*D*). Ergo *g* ad *h*
104. *h*. non maior est, quàm vt *u*(*A*) ad *u*(*C*).
12. *h*. *u*(*A*); *u*(*C*): *C*; *A*.
12. *h*. *C*: maior, quàm *A*.
13. 5. *g*; *h*: non maior, quàm *C*; *A*.
8. 5. *D*; *A*: maior, quàm *C*; *A*.
13. 5. *g*; *h*: minor: quàm *D*; *A*.
2. 3. *f*; *e*: maior, quàm *D*; *A*.
13. 5. *g*; *h*: minor, quàm *f*; *e*.
91. *h*. *ge*: minor, quàm *fh*.

Est autem *g* logarithmus rationis *u*(*A*) ad
12. *h*. *u*(*B*), vel *B* ad *A*: ideoque *ge*, logarithmus est
80. *h*. rationis *B* ad *A* totuplicatæ, quotus est *e*. item *fh*, logarithmus est rationis *D* ad *C* totuplicatæ,
81. *h*. quotus est *f*. Ergo sicut *ge*, minor est, quàm *fh*: sic totuplicata ratio *B* ad *A*, quotus est *e*, depressior est, quàm totuplicata *D* ad *C*, quotus est *f*.

hypoth. | & est *B*, maior, quàm *A*, & *D* maior, quàm *C*:
def.p.4. | ergo totuplicata ratio *B* ad *A*, quotus est *e*, minor est, quàm totuplicata *D* ad *C*, quotus est *f*.
2. 3. | & conuertendo, totuplicata *A* ad *B*, quotus est *e*, maior, quàm totuplicata *C* ad *D*, quotus est *f*. Quod &c.

def.13.h | Si *u*(*A*), minor est, quàm *u*(*C*): etiam *u*(*B*), mi-
88. h. | nor est, quàm *u*(*D*): & est ratio *u*(*C*) ad *u*(*D*), altior, quàm *u*(*A*) ad *u*(*B*): & est *u*(*C*), maior vtralibet *u*(*D*), & *u*(*A*).
104. h. | *h*; *g*: non minor, quàm *u*(*C*); *u*(*A*).
12. h. | *u*(*C*); *u*(*A*): *A*; *C*.
13. 5. | *h*; *g*: non minor, quàm *A*; *C*.
8. 5. | *A*; *C*: maior, quàm *A*; *D*.
hypoth. | *A*; *D*: maior, quàm *e*; *f*.
13. 5. | *h*; *g*: maior, quàm *e*; *f*.
91. h. | *hf*: maior, quàm *eg*.
sup. | Totuplicata *A* ad *B*, quotus est *e*, maior, quàm totuplicata *C* ad *D*, quotus est *f*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 94. Prop. 107.

SI fuerint quatuor quantitates arithmeticè dispositæ, & prima, maior, quàm secunda: fuerint autem & duo numeri, prior ad posteriorem maior, quàm vt prima quantitas ad quartam: erit primæ ad secundam totuplicata ratio, quotus est prior numerus, maior, quàm tertię ad quar-

tam

tam totuplicata, quotus est posterior.

Hypoth.

Sint quatuor quantitates *A*, *B*, *C*, *D*, arithmeticè dispositæ: & sit *A*, maior, quàm *B*; ideoque etiam *C*, maior, quàm *D*: & sit *e* numerus ad numerum *f*, maior, quàm vt *A* ad *D*.

Dico *A* ad *B* totuplicatam, quotus est *e*, maiorem esse, quàm *C* ad *D* totuplicata, quotus est *f*.

Demonstr.

Sunt enim quatuor quantitates arithmeticè
hypoth. dispositæ *D*, *C*, *B*, *A*: & est *D* minor, quàm *C*:
2. 3. & *f* ad *e*, minor est, quàm vt *D* ad *A*. ergo *D*
106. b. ad *C* totuplicata ratio, quotus est *f*, maior est,
2. 3. quàm *B* ad *A* totuplicata, quotus est *e*. Et conuertendo, *C* ad *D* totuplicata, quotus est *f*, minor, quàm *A* ad *B* totuplicata, quotus est *e*. Quod &c.

Quare &c.



Perilluſt. & Excellentiſs. D. Io. Dominico Caſſino Aſtronomo D.S. Petrus Mengolus S. D.



Vmquam mihi ſatis credo, Vir Excellentiſs. cum publicanda conſcribo; ideoque meritò nec omninò ſcholaribus credendum puto: quorum licet ope me fateor plurimùm profeciſſe; non tamen auctoritate oportuit confirmari. Tu verò, qui ſcis, & potes, tuis in me multis hucuſque poſitis, hoc addas officium velim: praua, ſi quæ ſunt, emendes primùm: in iis, quæ malè poſita ſunt, conſilio adiuues; in cæteris, mihi duplices intellectum. Quod vt præſtes faciliùs, retexam breuiter huiuſce operis narrationem: quam cum legeris, præfationemque ad lectorem percurreris; plurima quidem curſim prætereundo intelligere; paucis verò difficilioribus lectis attentiùs, demonſtratiſq́ꝫ, poſſis de toto volumine ſententiam ferre.

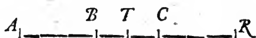
Ante annos duodecim, occaſione cuiuſdam problematis mihi propoſiti à D. Io. Antonio Rocca Regienſi, de figura vnilinea deſcribenda, quæ ſecaret ellipſim in duobus punctis innumerabiles eiuſmodi figuras excogitaui, quas tunc per Geometriam indiuiſibilium quadrabam, adhibito tamen priùs hoc lemmate.

Lem-

Lemma.

Data recta linea, diuisa primùm bifariam, deinde non bifariam in duobus punctis, vtrimque à medio puncto æqualiter distantibus: assignatisque vnius eiusdem gradus potestatibus abscissarum; necnon alius eiusdem gradus potestatibus residuarum: inuenire cui sit æquale aggregatum ex duobus productis synonymis, sub potestatibus abscissarũ assignatis, per suarum assignatas potestates residuarum.

Est autem hoc lemma affine illi, quod recitat Bonauentura Cauallerius b. m. præceptor meus ex Io. Beugrand: quod idcircò in expositione placet imitari.



Sit recta *AR*, diuisa bifariam in *T*, & non bifariam in punctis *C*, *B*, æqualiter hinc inde à *T* distantibus. Oportet inuenire, cui sit æquale aggregatum productorum synonymorum sub potestatibus partium inæqualium *AB*, *BR*, & *AC*, *CR*. Vt autem breuiori via id obtineamus, procedemus per Algebram Speciosam, partes *AT*, *TR*, vocantes t: & partes *BT*, *TC*, vocantes a. Erunt ergo *AB*, *CR*, $t-a$: & erunt *AC*, *BR*, $t+a$. Assignatis itaque primis potestatibus abscissarum *AB*, *AC*, necnon primis residuarum *BR*, *CR*; volens inuenire cui æquetur summa productorum sub primis potestatibus *ABR*, *ACR*, statim ducendo $t-a$ per $t+a$ produco vnum: & ducendo

$$A \text{———} B \text{—} T \text{—} C \text{———} R$$

do $t+a$ per $t-a$, produco alterum, quorum summa, $2t2 - 2a2$.

Exemplum primum in Vniprimis.

AB: $t-a$	AC: $t+a$
BR: $t+a$	CR: $t-a$
ABR: $t2-a2$	ACR: $t2-a2$
	$t2-a2$

$ABR+ACR$: $2t2-2a2$

Vnde sequitur aggregatum productorum sub primis potestatibus ABR, ACR, æquale esse, duplæ secundæ potestati AT, dempta dupla secunda TC.

Quod si assignatis secundis potestatibus abscissarum AB, AC, & primis residuarum BR, CR, velim scire cui æquetur summa productorum sub potestatibus secunda AB, & prima BR, & sub secunda AC & prima CR: effingo secundam potestatem à radice $t-a$, quàm duco in primam $t+a$; vt fiat vnus productus: item effingo secundam $t+a$, quàm duco in primam $t-a$; vt fiat alter productus: quorum summam inuenio $2t3 - 2ta2$.

Exem-

Exemplum 2. in Biprimis.

AB: $t2 - 2ta + a2$

BR: $t + a$

$t3 - 2t2a + ta2$

$+ t2a - 2ta2 + a3$

ABR: $t3 - t2a - ta2 + a3$

AC: $t2 + 2ta + a2$

CR: $t - a$

$t3 + 2t2a + ta2$

$- t2a - 2ta2 - a3$

ACR: $t3 + t2a - ta2 - a3$

$t3 - t2a - ta2 + a3$

ABR+ACR: $2t3 - 2ta2$.

Vnde manifeſtum eſt aggregatum productorum ſub poteſtatibus, ſecunda *AB* & prima *BR*, & ſub ſecunda *AC* & prima *CR*, æquale eſſe duplæ poteſtati tertiæ *AT*, dempto duplo producto ſub prima *AT*, & ſecunda *TC*.

Similiter in cuiuslibet appellationis proportionalibus progrediendo, conſequemur optatum: vt exemplis ſubiectis liquidò apparet:

Exem-

A ——— B — T — C ——— R

Exemplum 3. in Triprimis.

AB:	$t3 - 3t2a + 3ta2 - a3$
BR:	$t + a$
	$t4 - 3t3a + 3t2a2 - ta3$
	$+ t3a - 3t2a2 + 3ta3 - a4$
ABR:	$t4 - 2t3a + 2ta3 - a4$
AC:	$t3 + 3t2a + 3ta2 + a3$
CR:	$t - a$
	$t4 + 3t3a + 3t2a2 + ta3$
	$- t3a - 3t2a2 - 3ta3 - a4$
ACR:	$t4 + 2t3a - 2ta3 - a4$
	$t4 - 2t3a + 2ta3 - a4$
ABR+ACR:	$2t4 - 2a4$.

Exemplum 4. in Bisecundis.

AB:	$t2 - 2ta + a2$
BR:	$t2 + 2ta + a2$
	$t4 - 2t3a + t2a2$
	$+ 2t3a - 4t2a2 + 2ta3$
	$+ t2a2 - 2ta3 + a4$.

ABR: $t4 - 2t2a2 + a4$
Similiter *ACR*: $t4 - 2t2a2 + a4$
ABR+ACR: $2t4 - 4t2a2 + 2a4$.

Exemplum 5. in Quadriprimis.

AB: $t4 - 4t3a + 6t2a2 - 4ta3 + a4$
BR: $t + a$

$t5 - 4t4a + 6t3a2 - 4t2a3 + ta4$
$+ t4a - 4t3a2 + 6t2a3 - 4ta4 + a5$

ABR: $t5 - 3t4a + 2t3a2 + 2t2a3 - 3ta4 + a5$

AC: $t4 + 4t3a + 6t2a2 + 4ta3 + a4$
CR: $t - a$

$t5 + 4t4a + 6t3a2 + 4t2a3 + ta4$
$- t4a - 4t3a2 - 6t2a3 - 4ta4 - a5$

ACR: $t5 + 3t4a + 2t3a2 - 2t2a3 - 3ta4 - a5$
$t5 - 3t4a + 2t3a2 + 2t2a3 - 3ta4 + a5$

ABR+ACR: $2t5 + 4t3a2 - 6ta4$.

A B T C R

Exemplum 6. in Trisecundis.

$AB: \; t3 - 3t2a + 3ta2 - a3$

$BR: \; t2 + 2ta + a2$

$t5 - 3t4a + 3t3a2 - t2a3$

$+ 2t4a - 6t3a2 + 6t2a3 - 2ta4$

$+ t3a2 - 3t2a3 + 3ta4 - a5$

$ABR: \; t5 - t4a - 2t3a2 + 2t2a3 + ta4 - a5.$

$AC: \; t3 + 3t2a + 3a2 + a3$

$CR: \; t2 - 2ta + a2$

$t5 + 3t4a + 3t3a2 + t2a3$

$- 2t4a - 6t3a2 - 6t2a3 - 2ta4$

$+ t3a2 + 3t2a3 + 3ta4 + a5.$

$ACR: \; t5 + t4a - 2t3a2 - 2t2a3 + ta4 + a5$

$t5 - t4a - 2t3a2 + 2t2a3 + ta4 - a5$

$ABR + ACR: \; 2t5 - 4t3a2 + 2ta4.$

Similiter in Quintiprimis.

$ABR + ACR: \; 2t6 + 10t4a2 - 20t2a4 - 2a6.$

In

In Quadrisecundis.

ABR+ACR: $2t6 - 2t4a2 - 2t2a4 + 2a6.$

In Tritertijs.

ABR+ACR: $2t6 - 6t4a2 + 6t2a4 - 2a6.$

In Sextiprimis.

ABR+ACR: $2t7 + 18t5a2 - 10t3a4 - 10ta6.$

In Quintisecundis.

ABR+ACR: $2t7 + 2t5a2 - 10t3a4 + 8ta6.$

In Quadritertijs.

ABR+ACR: $2t7 - 6t5a2 + 6t3a4 - 2ta6.$

In Septimiprimis.

ABR+ACR: $2t8 + 28t6a2 - 28t2a6 - 2a8.$

In Sextisecundis.

ABR+ACR: $2t8 + 8t6a2 - 30t4a4 + 8t2a6 + 2a8.$

In Quintitertijs.

ABR+ACR: $2t8 - 4t6a2 + 4t2a6 - 2a8.$

In Quadriquartis.

ABR+ACR: $2t8 - 8t6a2 + 12t4a4 - 8t2a6 + 2a8.$

In Octauiprimis.

ABR+ACR: $2t9 + 40t7a2 + 28t5a4 - 56t3a6 - 14ta8.$

In Septimisecundis.

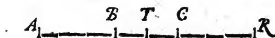
ABR+ACR: $2t9 + 16t7a2 - 28t5a4 + 10ta8.$

In Sextitertijs.

ABR+ACR: $2t9 - 12t5a4 + 16t3a6 - 6ta8.$

In Quintiquartis.

ABR+ACR: $2t9 - 8t7a2 + 12t5a4 - 8t3a6 + 2ta8.$



In Noniprimis.

ABR+ACR: $2t^{10} + 54t^{8}a^{2} + 84t^{6}a^{4} - 84t^{4}a^{6} - 54t^{2}a^{8} - 2a^{10}$.

In Octauisecundis.

ABR+ACR: $2t^{10} + 26t^{8}a^{2} - 28t^{6}a^{4} - 28t^{4}a^{6} + 26t^{2}a^{8} + 2a^{10}$.

In Septimitertijs.

ABR+ACR: $2t^{10} + 6t^{8}a^{2} - 28t^{6}a^{4} + 28t^{4}a^{6} - 6t^{2}a^{8} - 2a^{10}$.

In Sextiquartis.

ABR+ACR: $2t^{10} - 6t^{8}a^{2} + 4t^{6}a^{4} + 4t^{4}a^{6} - 6t^{2}a^{8} + 2a^{10}$.

In Quintiquintis.

ABR+ACR: $2t^{10} - 10t^{8}a^{2} + 20t^{6}a^{4} - 20t^{4}a^{6} + 10t^{2}a^{8} - 2a^{10}$.

Propositio.

In parallelogrammo ducta diametro, regula basi: omnes sexcuplæ vniprimæ sub triangulis, sunt æquales omnibus secundis potestatibus parallelogrammi.

Et omnes duodecuplæ biprimæ, omnibus tertijs potestatibus parallelogrammi.

Et omnes 20plæ triprimæ: necnon omnes 30plæ bisecundæ; omnibus quartis potestatibus.

Et

Et omnes 30plæ quadriprimę: necnon omnes 60plæ trisecundæ; omnibus quintis potestatibus.

Et omnes 42plę quintiprimę: item omnes 105plę quadrisecundæ: & omnes 140plæ tritertiæ; omnibus sextis potestatibus.

Et omnes 56plæ sextiprimæ: item omnes 168plę quintisecundæ: item omnes 280plæ quadritertiæ; omnibus septimis potestatibus.

Et omnes 72plæ septimiprimæ: item omnes 252plæ sextisecundæ: necnon omnes 504plæ quintitertiæ: & omnes 630plæ quadriquartæ; omnibus octauis potestatibus.

Et omnes 90plę octauiprimæ: & omnes 360plæ septimisecundę: & omnes 840plæ sextitertiæ: & omnes 1260plæ quintiquartæ; omnibus nonis potestatibus.

Et omnes 110plæ noniprimæ: & omnes 495plæ octauisecundæ: & omnes 1320plæ septimitertiæ: & omnes 2310plæ sextiquartæ: & omnes 2772plæ quintiquintæ; omnibus decimis potestatibus.

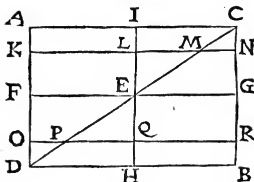
Et sic deinceps in infinitum iuxta numeros tabulę quadratricum, vel quadraturarum, cōtinuatę quātùm oportet.

Meth. Demonstr.

Affinis est hæc propositio, tribus propositionibus, quas loco citato refert Cauallerius ex eodem Beugrand *Exerc.* 4. *prop.* 25, 26, *&* 27: Eademque illarum methodo demonstrabitur, ex Lemmate præcedenti. Porrò satis puto ad ostensionem eiusdem methodi, ex decem propositis, tria tantùm demonstrare.

Hy-

Hypoth.



Esto parallelogrammum *AB*, cuius diameter *CD*: diuidaturque *CD* bifariam in *E*: ducanturque per *E*, rectæ *FG*, *IH*, parallelogrammi *AB* lateribus parallelę: ducanturque hinc inde ab *E* distantes quantumlibet, sed æqualiter, & intra quadratum, duæ *K L MN*, & *O P Q R*.

Dico sub triangulis *ACD*, *BCD*, omnes sextuplas vniprimas, æquales esse, omnibus secundis potestatibus parallelogrammi *AB*.

Demonstr. p.

Quoniam aggregatum ex vniprimis *KMN*, *OPR*, est æquale duplæ secundę potestati *KL*, dempta dupla secunda potestate *LM*: & *KN* ducta est vtcunque. Ergo ex omnibus vniprimis, sub trapezio *AFEC*, & sub triangulo *CEG*, & ex omnibus, sub triangulo *EFD*, & sub trapezio *EDBG*, aggregatum; quod est omnes vniprimæ

mæ ſub triangulis *ACD*, *BCD*: eſt æquale omnibus duplis ſecundis poteſtatibus parallelogrammi *AE*, demptis omnibus duplis ſecundis poteſtatibus trianguli, *IEC*; ideſt omnibus ſimplis ſecundis poteſtatibus parallelogrammi *AH*, demptis omnibus ſecundis poteſtatibus, vtrorumq; triangulorum *IEC*, *DEH*.

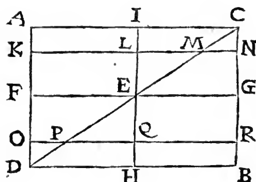
Sed qualium trianguli *IEC* omnes ſecundę poteſtates, ſunt vnitas: talium parallelogrammi *AE*, ſunt 3. Ideoq; qualium omnes ſecundæ poteſtates triangulorum *IEC*, *DEH*, ſunt 2: talium omnes ſecundæ poteſtates parallelogrammi *AH*, ſunt 6. Et omnes vniprimæ ſub triangulis *ACD*, *BCD*, ſunt vtrorumque differentia, nempe 4: & omnes ſexcuplæ vniprimæ, ſub triangulis *ACD*, *BCD*, ſunt 24. Item qualium omnes ſecundæ poteſtates *AH*, ſunt 6: talium omnes ſecundæ poteſtates *AB*, ſunt 24. Ergo omnes ſextuplæ vniprimę, ſub triangulis *ACD*, *BCD*, ſunt ęquales, omnibus ſecundis poteſtatibus *AB*. Quod &c.

Dico ſub triangulis *ACD*, *BCD*, omnes duodecuplas biprimas, æquales eſſe, omnibus tertijs poteſtatibus parallelogrammi *AB*.

Demonſtr.2.

Quoniam aggregatum ex biprimis *KMN*, *OPR*, eſt æquale duplæ tertiæ poteſtati *KL*, dempta dupla vniſecunda *KLM* (ideſt, dempto duplo producto ſub poteſtatibus, prima *KL*, & ſecunda *LM*). Oſtendetur ſimiliter vt ſupra, quòd omnes biprimæ ſub triangulis *ACD*, *BCD*,

ſunt



sunt æquales omnibus tertijs potestatibus parallelogrammi *AH*, demptis omnibus vnisecundis sub potestatibus primis eiusdem *AH*, & sub secundis vtrorumque triangulorum *IEC*, *DEH*.

Qualium autem omnes secundæ potestates trianguli *IEC*, sunt vnitas: talium omnes secundæ potestates parallelogrammi sunt 3: ideoque qualium omnes vnisecundæ sub parallelogrammo *AE*, & sub triangulo *IEC*, sunt sunt vnitas: talium omnes tertiæ potestates parallelogrammi *AE*, sunt 3. & qualium omnes vnisecundæ sub parallelogrammo *AH*, & sub vtrisque triangulis *IEC*, *DEH*, sunt 2: talium omnes tertiæ potestates *AH*, sunt 6: & omnes biprimæ sub triangulis *ACD*, *BCD*, sunt vtrorumque differentia, nempe 4: & omnes duodecuplę biprimæ sub triangulis *ACD*, *BCD*, sunt 48. item qualium omnes tertiæ potestates *AH*, sunt 6: talium omnes ter-

tiæ

tiæ poteſtates *AB*, ſunt 48. Ergo omnes duodecuplæ biprimæ, ſub triangulis *ACD*, *BCD*, ſunt æquales omnibus tertijs poteſtatibus *AB*. Quod &c.

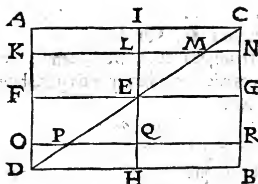
Dico ſub triangulis *ACD*, *BCD*, omnes 60plas triſecundas, æquales eſſe, omnibus quintis poteſtatibus parallelogrammi *AB*.

Demonſtr. 3.

Quoniam aggregatum ex triſecundis *KMN*, *OPR*, eſt æquale duplæ quintæ poteſtati *KL*, dempta quadrupla triſecunda *KLM*, addita dupla vniquarta *KLM*. oſtendetur ſimiliter vt ſupra, quod omnes triſecundæ ſub triangulis *ACD*, *BCD*, ſunt æquales omnibus quintis poteſtatibus parallelogrammi *AH*; demptis omnibus duplis triſecundis, ſub poteſtatibus tertijs *AH*, & ſub ſecundis vtrorumque triangulorum *IEC*, *DEH*, additis omnibus vniquartis ſub poteſtatibus primis *AH*, & ſub quartis vtrorumque triangulorum *IEC*, *DEH*.

Qualium autem omnes ſecundæ poteſtates trianguli *IEC*, ſunt 5: talium omnes ſecundæ poteſtates parallelogrammi *AE*, ſunt 15. ideoque qualium omnes triſecundæ ſub tertijs poteſtatibus parallelogrammi *AE*, & ſub ſecundis trianguli *IEC*, ſunt 5: talium omnes quintæ poteſtates parallelogrammi *AE*, ſunt 15: atque talium omnes duplæ triſecundæ ſub *AE*, & ſub *IEC*, ſunt 10: atque differentia vtrarumque, eſt 5.

Rurſum, qualium omnes quartæ poteſtates trianguli *IEC*, ſunt 3: talium omnes quartæ poteſtates *AE*, ſunt



15. ideoque qualium omnes vniquartæ, sub primis, *AE*, & quintis *IEC* poteſtatibus, ſunt 3: talium omnes quintæ poteſtates *AE*, ſunt 15. ſed talium oſtenſæ ſunt omnes quintæ *AE*, demptis omnibus duplis triſecundis, ſub *AE*, & ſub *IEC*, eſſe 5: ergo additis omnibus vniquartis, ſub *AE*, & ſub *IEC*, ſunt 8.

Sed qualium omnes quintæ *AE*, ſunt 15: talium omnes quintæ *AH* ſunt 30: & omnes quintæ *AH*, demptis omnibus duplis triſecundis, ſub *AH*, & ſub vtriſque *IEC*, *DEH*, additiſque omnibus vniquartis, ſub *AH*, & ſub vtriſque *IEC*, *DEH*, ſunt 16; nempe omnes triſecundæ, ſub triangulis *ACD*, *BCD*, ſunt 16: & omnes 60plæ triſecundæ ſub ijſdem, ſunt 960. & qualium omnes quintæ poteſtates *AH*, ſunt 30: talium omnes quintæ poteſtates *AB*, ſunt 960. Ergo omnes 60plæ triſecundæ, ſub triangulis *ACD*, *BCD*, ſunt æquales, omnibus quintis poteſtatibus parallelogrammi *AB*. Quod &c. Quare &c.

His

His demonstratis, cogitabam si possent aliæ quadraturæ inueniri ex inuentis compositæ, in quas insignis aliqua resoluatur; quemadmodum in triangula, parabolam Archimedes resoluit. Et quæsiui primum de omnibus figuris, in quibus ordinatæ ad basim, sunt omnes potestates abscissarum, primæ, secundæ, tertiæ, & deinceps in infinitum: quas ex demonstratis à Cauallerio loco citato, deprehendebam esse in serie harmonica naturali ab vnitate: earumque summam demonstraui excrescere in infinitum, in præfatione ad meum libellum, cui titulus, Nouæ Quadraturæ Arithmeticæ, seu de Additione Fractorum.

Deinde tentaui, si possent in vnam colligi summam figuræ, in quibus ordinatæ ad basim, sunt abscissæ primæ, & producti sub primis abscisis, & residuarum potestatibus omnifariam, idest, abscissæ primæ, vniprimæ, vnisecundæ, vnitertiæ, vniquartæ, & deinceps in infinitum: quas colligere mihi succesit fæliciter, & æquales inuenire parallelogrammo, cuius ad eamdem basim ordinatæ, sunt omnes totæ; vt potest facilè colligi ex suprà demonstratis, & ex 17. p. Nou. Quadr.

Item si possent colligi figuræ, in quibus ordinatæ ad basim sunt abscissæ secundæ, & producti sub abscisis secundis, & residuarum potestatibus omnifariam; idest, abscissæ secundæ, biprimæ, bisecundæ, bitertiæ, biquartæ, & deinceps in infinitum: quas etiam colligere mihi succesit, & æquales inuenire triangulo, cuius ordinatæ sunt omnes obscissæ. vt patet ex suprà demonstratis, & ex 8.2. Nou. Quadr.

Et generaliter inueni, figuram, in qua ordinatæ sunt omnes potestates abscissarum, & deinceps omnes figuras, in quibus ordi-

natæ sunt productæ sub ijsdem potestatibus abscissarum, & sub residuarum potestatibus omnifariam, simul aggregatas, æquales esse figuræ, in qua ordinatæ, sunt omnes potestates abscissarum ordinis proximè inferioris. Verbi gratia, omnes abscissas tertias, additis omnibus triprimis, omnibus trisecundis, omnibus tritertijs, alijsque omnibus triquotis; esse æquales, omnibus abscisis secundis. Item omnes abscissas quartas, additis omnibus quadriprimis, omnibus quadrisecundis, omnibus quadritertijs, omnibus quadriquartis, alijsque omnibus quadriquotis; esse æquales omnibus abscisis tertijs, quod ita generaliter vt enunciatum est, & ex supra demonstratis, & ex 5. 3. Nou. Quadr. potest manifestari.

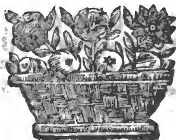
Ipsam interim accessionem, quàm Geometriæ Indiuisibilium feceram, præteriui: veritus eorum authoritatem, qui falsum putant suppositum, omnes rectas figuræ planæ infinitas, ipsam esse figuram planam: non quasi hanc sequens partem; sed illam quasi non prorsus indubiam deuitans: tentandi animo, si possem denuum eamdem indiuisibilium methodum, aut aliam æquiualentem nouis, & indubijs prorsus constituere fundamentis.

Mechanicis deinde ac Musicis hucusque imperfectis occupatus lucubrationibus, in eas quandoque veni demonstrandarũ conclusionum angustias, vt per omnifariam hæc nostra elementa, nouorum indigerem argumentorum. quæ priuatis tradita scriptis delitescebant, non inculta solùm, sed & ita perperam posita, vt quasi specialia Lemmata quorumdam mathematum, non valerent ad aliud. Animaduertebam etiam me non posse multùm in Mechanicis proficere, quas liberaliter profiteor; nisi ex vberiore

Geo-

Geometria, quàm quæ hucusque ab Euclide, Apollonio, alijsque posterioribus tradita esset.

Nuperrimè hoc anno, Adm. R. P. Fr. Stephanus de Angelis Iesuattus, meus condiscipulus, de indiuisibilium Præceptoris nostri Geometria omnium optimè meritus, cuius intellectus copiam, & fælicitatem, nunquam satis à me cōmendari posse verbis existimo, mittebat ad me libellum suum De Infinitis Parabolis &c. legendum: cuius ex eruditione mirabili, melior, & vegetior factus Geometra; maximum hoc emolumentum percepi: vt præterita studia reuerterentur in mentem; ordinemque, inter plura deinceps inuenta, postularent. & illud tandem mihi, opinor, successisse fæliciter, quod duodecim ante annos desideraueram: ijs etiam, quibus deuincior, Mechanicorum studiorum obligationibus oportunum. super qua mea opinione, Vir Excellentissime, hisce lucubrationibus perlectis; & quatenus oportuerit ad correctionem notatis: tuam sinceram enixè rogans, postulo, & expecto sententiam. Vale.



Tabula Formosa.

FO.u.
FO.a. FO.r.
FO.a2. FO.ar. FO.r2.
FO.a3. FO.a2r. FO.ar2. FO.r3.
FO.a4. FO.a3r. FO.a2r2. FO.ar3. FO.r4.

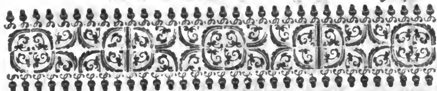
Tabula Subquadraturarum.

FO.u.
FO.a. FO.r.
FO.a2. FO.2ar. FO.r2.
FO.a3. FO.3a2r. FO.3ar2. FO.r3.
FO.a4. FO.4a3r. FO.6a2r2. FO.4ar3. FO.r4.

Tabula Quadraturarum.

FO.u.
FO.2a. FO.2r.
FO.3a2. FO.6ar. FO.3r2.
FO.4a3. FO.12a2r. FO.12ar2. FO.4r3.
FO.5a4. FO.20a3r. FO.30a2r2. FO.20ar3. FO.5r4.

GEO-



GEOMETRIÆ SPECIOSÆ

ELEMENTVM SEXTVM.

DEFINITIONES.



1 ASſumatur inter lineas, vna quælibet quantitas; quæ, Rationalis, dicetur.

2 Et exponatur quædam recta linea, rationali æqualis; quæ dicetur, Tota:

3. Sitque data poſitione; quæ dicetur, Baſis.

4. Eiuſqne alterum extremorum punctorum, dicetur, Finis abſciſſarum.

5. Alterum, Finis reſiduarum.

6. Et ab vnoquoque puncto in baſi ſumpto, vſque ad finem abſciſſarum, quatenus ipſa baſis extenditur, quantitas dicetur Abſciſſa.

7. Ideoque tota dicetur etiam, Maxima abſciſſarum.

8. Item ab vnoquoque puncto in baſi ſumpto, vſque ad finem reſiduarum, quatenus baſis extenditur, quantitas dicetur Reſidua.

9. Ideo-

9. Ideoque tota dicetur etiam, Maxima residuarum.

10. Super basi describatur quadratum: & ab vno quolibet puncto in basi sumpto, recta ducatur, vsque ad oppositum latus, reliquis lateribus quadrati parallela: quæ dicetur, Ordinata in quadrato.

11. Quæ cum sit æqualis rationali, & totę; dicetur Rationalis, & Tota, & Maxima abscissarum; & Maxima residuarum.

12. Et quadratum, per suas ordinatas extensum, dicetur, Forma omnes rationales, & Forma omnes totæ. & significabitur characteribus *FO.u.* & *FO.t.*

13. Immò quoniam tota est æqualis rationali, & reliquæ omnes potestates totę, sunt inter se, & rationali æquales: ordinata in quadrato dicetur etiam, Tota secunda, Tota tertia, Tota quarta, & deinceps.

14. Et quadratum, dicetur, Forma omnes totæ secundæ, Forma omnes totæ tertiæ, Forma omnes totæ quartę. aptisque significabitur characteribus, *FO.t2*, *FO.t3*, *FO.t4*. & sic deinceps.

15. A fine abscissarum ducta diameter quadrati, facit semiquadratum triangulum: cuius ab vnoquolibet puncto in basi sumpto recta ducatur, vsque ad prædictam diametrum, alteri lateri parallela, quæ dicetur, Ordinata in triangulo.

16. Quæ cum sit æqualis abscissæ, dicetur, Abscissa.

17. Ipsumque triangulum per suas ordinatas extensum, dicetur, Forma omnes abscissæ. & significabitur charactere, *FO.a.*

18. Si-

18. Similiter à fine residuarum ducta diameter quadrati, facit semiquadratum triangulum: cuius vnaquęlibet ordinata, cum sit æqualis residuæ, dicetur Residua.

19. Et per ordinatas residuas extensum triangulum, dicetur, Forma omnes residuæ. & significabitur charactere, *FO.r.*

20. Si super basi concipiatur figura extensa non nisi per ordinatas in quadrato: sed in qua, vnaquælibet ordinata, est abscissa secunda, dicetur, Forma omnes abscissæ secundæ. & significabitur charactere *FO.a2.*

21. Item, in qua, vnaquælibet ordinata, est vniprima, dicetur, Forma omnes vniprimæ. & significabitur charactere, *FO.ar.*

22. Et in qua, vnaquælibet ordinata, est residua secunda, dicetur Forma omnes residuæ secundæ. & significabitur charactere, *FO.r2.*

23. Et generaliter, si super basi concipiatur figura, extensa non nisi per ordinatas in quadrato: & in qua, vnaquęlibet ordinata, est assumpta quædam in tabula proportionalium: dicetur, Forma omnes tales proportionales. aptoque significabitur charactere. vt Forma omnes abscissæ tertiæ, *FO.a3*: Forma omnes biprimę, *FO.a2r*: Forma omnes vnisecundæ, *FO.ar2*: Forma omnes residuæ tertiæ, *FO.r3*. & sic deinceps.

24. Itaque ad instar tabulæ proportionalium, & specierum, alia tabula ordinabitur formarum, quæ dicetur, Formosa.

 25. Quod

25. Quod si vna quælibet ordinata in forma, est assumpta quædam in tabula nominum: dicetur, Forma omnes totuplæ tales proportionales, aptoque significabitur charactere. vt, Forma omnes duplæ vniprimæ, *FO.2ar*: Forma omnes triplæ biprimæ, *FO.3a2r*: Forma omnes triplæ vnisecundæ, *FO.3ar2*. & sic deinceps.

26. Ideoque ad instar tabulæ nominum, & subquadratricum, alia tabula ordinabitur, quæ dicetur, Tabula subquadraturarum.

27. In qua digestæ formæ, dicentur, Subquadraturæ.

28. Item ad instar tabulæ quadratricum, alia tabula ordinabitur, quæ dicetur, Tabula Quadraturarum.

29. In qua digestæ formæ, dicentur, Quadraturæ.

30. Denique si vnaquælibet ordinata, in forma, est assumptæ proportionalis multipla, vel submultipla, vel multiplæ submultipla: dicetur, Forma omnes totuplæ tales proportionales, vel subtotuplæ, vel totuplarum subtotuplæ. aptisque significabitur characteribus. vt Forma omnes quintuplæ bitertiæ, *FO.5a2r3*: & Forma omnes biprimę subtriplæ, *FO.a2r(3)*: & Forma omnes quadruplæ triquartæ subseptulæ, *FO.4a3r4(7)*. & sic deinceps.

31. Si basis diuisa fuerit in partes æquales; ductæque fuerint per extrema & media diuisionum puncta parallelæ ordinatæ in forma; & super partibus basis æqualibus, inter parallelas completa fuerint parallelogramma maxima intra formam iacentia: figura ex parallelogrammis composita, dicetur, Inscripta formæ.

32. Quod

32. Quod si completa fuerint parallelogramma minima formam includentia: figura ex parallelogrammis composita, dicetur, Circumscripta formæ.

33. Figura vero ex tot parallelogrammis, quot sunt ordinatæ per puncta diuisionum, & ad ipsas ordinatas iacentibus composita, dicetur, Adscripta formę.

34. Speciosa, & Formosa tabulis congruentibus, Massæ, & Formæ, quarum in vtrisque sunt eędem appellationes, & ijdem characteres, dicentur inuicem Homonymę.

35. Item Homonymarum æquemultiplices, dicentur Homonymæ.

36. Ideoque etiam in duabus subquadratricum, & subquadraturarum, aut quadratricum, & quadraturarum tabulis, Massæ, & Formæ, dicentur Homonymę.



Theor. 1. *Prop.* 1.

Tabulæ formosæ primi lateris, in tertia, quarta, & reliquis deinceps formis, in singulis ordinatæ, pro maioribus abscissis, sunt maiores; & pro maxima abscissarum, est maxima, & ipsi basi æqualis: item vltimi lateris in formis, pro maioribus residuis, sunt maiores; & pro maxima residuarum, est maxima, & ipsi basi æqualis.

Hypoth.



Esto basis *AR*: in qua finis abscissarum, *A*; finis residuarum, *R*. & sint abscissæ, *AB* minor, *AC* maior, *AR* maxima; & residuæ, *RC* minor, *AB* maior, *RA* maxima: & esto in primo latere tabulæ formosæ, tertia *FO.a2*; & in vltimo, tertia *FO.r2*.

Dico in *FO.a2*, ordinatam per *C*, maiorem esse ordinata per *B*: & per *R*, maximam esse ordinatarum, & æqualem ipsi *AR*.

Item in *FO.r2*, ordinatam per *B*, maiorem esse ordinata per *C*: & per *A*, maximam esse ordinatarum, & æqualem ipsi *RA*.

Demonstr.

Basis *RA*, ad ordinatam per *B*, duplicatam habet rationem eius, quàm habet ad *AB*: & ad ordinatam per *C*, duplicatam eius, quàm habet ad *AC*: *def.20h*

AC: & ad ordinatam per *R*, duplicatam æqualitatis, quàm habet ad *AR*. Sed *RA* ad *AB*, maior eſt, quàm vt ad *AC*: & ad *AC*, maior, quàm
4. 3. vt æqualis ad *AR*. Ergo ad ordinatam per *B*, maior eſt, quàm vt ad ordinatam per *C*: & ad ordinatam per *C*, maior, quàm vt ad ordinatam per *R*. Ergo ordinata per *B*, minor eſt, quàm quæ per *C*: & vtralibet per *B*, & per *C*, minor, quàm quæ per *R*: & ordinata per *R*, eſt maxima; ad quàm *RA* duplicatam habet rationem æqualitatis, nempe eamdem habet æqualitatis rationem: ergo per *R* ordinata, eſt ipſi *AR* æqualis. Quæ &c.

Simili prorſus demonſtratione oſtendetur, quòd in *FO.r2*, ordinata per *B*, maior eſt, quàm quæ per *C*: & vtralibet per *B*, & per *C*, minor, quàm quæ per *A*: & per *A* ordinata eſt maxima, & ipſi *AR* æqualis. Quę &c.

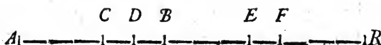
Quare &c.

Theor. 2. Prop. 2.

IN ſingulis formoſæ tabulę, non primi, nec vltimi lateris formis, ordinatarum maxima, minor eſt, quàm tota: & facit abſciſſam, & reſiduam, proportionales, vt numeri, à quibus ipſa forma denominatur: reliquarum verò ex vtralibet parte, propior maximę remotiore maior eſt.

Hy-

Hypoth.



Esto basis *AR*; in qua, finis abscissarum, *A*; finis residuarum *R*: & esto in tabula formosa, non in primo, nec in vltimo latere, forma omnes bitertiæ, quàm denominant numeri 2, 3, cuius character, *FO.a2r3*. & diuidatur *AR* in *B*, vt abscissa *AB*, ad residuam *BR* sit proportionalis, sicut 2 ad 3: sumanturque aliæ abscissæ minores, quàm *BA*, nempe *DA*, *CA*: & aliæ residuæ minores, quàm *BR*, nempe *ER*, *FR*.

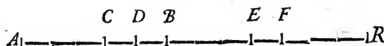
Dico in *FO.a2r3*, ordinatam per *B* minorem esse, quàm *AR*; & ordinatarum esse maximam: & ordinatam per *D*, maiorem esse, quàm quæ per *C*: & ordinatam per *E*, maiorem, quàm quæ per *F*.

Demonstr.

6. p. Rationalis *u*, ad *a2r3*, rationem habet compo-
def.8. p. sitam ex rationibus, *u* ad *a2*, & *u* ad *r3*: idest compositam ex duplicata *u* ad *a*, & ex triplicata *u* ad *r*. Est autem *AR* ad *AB*, vt *u* ad *a*: & *AR* ad *BR*, vt *u* ad *r*: & ad ordinatam per *B*, est vt *u* ad *a2r3*. Ergo *AR* ad ordinatam per *B*, habet rationem compositam ex rationibus, duplicata *AR* ad *AB*, atque triplicata *AR* ad *RB*. Sed *AR* ad *AB*, & *AR* ad *RB*, sunt maioris inæqualitatis

litatis rationes, quæ tùm multiplicatæ, tùm compositæ, faciunt maioris inæqualitatis rationem. Quare *AR* maior est, quàm ordinata per *B*. Quod &c.

Simili prorsus demonstratione ostendetur, quod ordinata per *D* ad *AR*, habet rationem compositam ex duplicata *AD* ad *AR*, & ex triplicata
p. p. *DR* ad *AR*. Ergo ex æquali, ordinata per *D* ad ordinatam per *B*, rationem habet compositam ex duplicata *DA* ad *AB*, & ex triplicata *DR* ad
def. 5. 5. *RB*. Sunt autem *DA*, *AB*, *BR*, *RD*, quatuor arithmeticè dispositæ, quarum secunda *AB* ad
105. 5. tertiam *BR* est vt 2 ad 3. Ergo duplicata ratio *DA* ad *AB* minor est, quàm triplicata *BR* ad
3. p. *RD*. Habet autem secunda potestas *DA* ad secundam *AB* duplicatam rationem eius, quàm habet *DA* ad *AB*: & tertia potestas *BR* ad tertiam *RD* triplicatam *BR* ad *RD*. Ergo secunda potestas *DA* ad secundam *AB* minor est, quàm vt
91. 5. tertia potestas *BR* ad tertiam *RD*: ergo productus sub secunda potestate *AD*, & sub tertia *DR*, minor est producto, sub secunda *AB*, & sub tertia
8. 5. *BR*. Sed productus sub secunda potestate *AD*, & sub tertia *DR*, ad productum sub secunda *AB*, & sub tertia *BR*, compositam habet ex rationibus secundæ potestatis *AD* ad secundam *AB*, & tertiæ *DR* ad tertiam *BR*: nempe compositam ex duplicata *AD* ad *AB*, & triplicata *DR* ad *RB*:



RB: nempe eamdem quàm ordinata per *D* ad ordinatam per *B*. Ergo ordinata per *D*, minor est quàm ordinata per *B*. Similiter ostendetur, quòd & ordinatæ per *E*, per *C*, per *F*, singulæ sunt minores, quàm ordinata per *B*. Ergo ordinata per *B* est maxima. Quod &c.

Simili prorsus demonstratione ostendetur, quod ordinata per *C* ad ordinatam per *D*, est vt productus sub secunda potestate *AC*, & sub tertia *CR*, ad productum sub secunda *AD*, & sub tertia *DR*: & quod rationem habet compositam ex rationibus, duplicata *CA* ad *AD*, & triplicata *CR* ad *RD*. Sunt autem *DA*, *AC*, *CR*, *RD*, quatuor arithmeticè dispositæ quarum *DA* maior est, quàm *AC*: & sunt duo numeri 2 ad 3, vt *AB* ad *BR*, maiorem scilicet rationem habentes, quàm
107. 5. *AD* ad *DR*. Ergo maior est *DA* ad *AC* dupli-
2. 3. cata ratio, quàm *CR* ad *RD* triplicata: & è conuerso minor est *CA* ad *AD* duplicata, quàm
3. p. *DR* ad *RC* triplicata: & minor est secunda potestas *CA* ad secundam *AD*, quàm vt potestas ter-
91. 5. tia *DR* ad tertiam *RC*: & minor est productus sub secunda potestate *AC*, & sub tertia *CR*, quàm sub secunda potestate *AD*, & sub tertia *DR*: &

minor

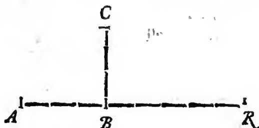
minor est ordinata per *C*, quàm ordinata per *D*. Similiter ostendetur, quòd ordinata per *F*, minor est, quàm ordinata per *E*. Quod &c.

Quare &c.

Probl. 1. *Prop.* 3.

FOrmæ propositæ, in data basi, per datum punctum, ordinatam inuenire.

Hypoth.



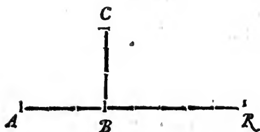
Esto proposita *FO.*1*oa*2*r*3, super data basi *AR*, in qua datum punctum *B*.

Oportet per *B* ordinatam inuenire.

Constr.

Data *AR*, datisque *AB*, *BR*, inueniatur recta *BC*, ad quàm *AR*, rationem habet compositam ex datis rationibus, *AR* ad *AB* duplicata, *AR* ad *BR* triplicata, & ex ratione subdecupla: & collocetur *BC* perpendiculariter ad *AR*.

Dico *BC*, esse ordinatam per *B*, in *FO.*1*oa*2*r*3.



Demonstr.

Ratio AR ad BC, componitur ex rationibus AR ad AB duplicata, & AR ad BR triplicata, & ex ſubdecupla: ſed AR, eſt u; AB, eſt a; BR, eſt r: Ergo AR ad BC ratio, componitur ex rationibus u ad a duplicata, u ad r triplicata, & ex ſubdecupla: ſed ex ijſdem componitur u ad $10a2r3$: ergo AR ad BC eſt vt u ad $10a2r3$: Sed AR eſt u: ergo BC, eſt $10a2r3$: ergo BC eſt ordinata per B, in $FO.10a2r3$. Quod &c.

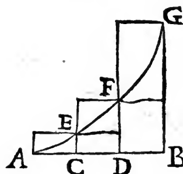
Quare &c.

Probl. 2. Prop. 4.

SVper data baſi propoſitæ formæ primi vel vltimi lateris, per datum numerum diuiſa in partes æquales, tres figuras ex parallelogrammis deſcribere, inſcriptam, circumſcriptam, & adſcriptam: & oſtendere, quòd inſcripta & adſcripta ſunt æquales: & quòd circumſcripta excedit inſcriptam quantitate rectanguli ſub maxima ordinata, & ſub vna æqualium baſis partium.

Hy-

Hypoth.



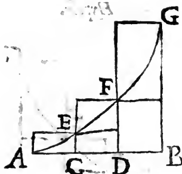
Esto propositæ formæ data basis *AB*, diuisa in datas partes æquales *AC*, *CD*, *DB*.

Oportet describere inscriptam, circumscriptam, & adscriptam.

Constr.

p. h. | Assumatur alterum extremorum *A*, *B*, nempe
3. h. | *B*, per quod ordinata est maxima: & inueniantur ordinatæ per data puncta *C*, *D*, *B*, rectæ *CE*, *DF*, *BG*: & compleantur parallelogramma *ED*, *FB*, *AE*, *CF*, *DG*.

Dico inscriptam esse ex *DE*, *BF*: circumscriptam, ex *AE*, *CF*, *DG*: adscriptam, ex *AE*, *CF*, vel ex *DE*, *BF*: & adscriptam inscriptæ æqualem esse: & circumscriptam excedere inscriptam quantitate rectanguli *DG*.



Demonstr.

p. h. Ordinatarum per omnia *BD* puncta, maxima est per *B*, minima per *D*: ergo parallelogrammorum inter ordinatas per *D*, & *B*, intra propositam formam iacentium, maximum est *BF*; & includentium formam, minimum est *DG*: excedit autem *DG*, ipsum *FB*, spatio *FG*. Similiter ostendetur, parallelogrammum inter ordinatas per *C*, & *D*, infra propositam formam iacentium, maximum esse *DE*; & includentium formam, minimum esse *CF*: excedit autem *CF*, ipsum *DE*,

p. h. spatio *EF*. Item quoniam *CE*, maxima est ordinatarum per omnia *AC* puncta; per *A* verò nulla est ordinata: ergo parallelogammorum, inter ordinatam per *C*, & eius parallelam per *A*, includentium formam, minimum est *AE*; nullum verò

def. 31 h est, intra formam iacentium. Ergo inscripta est,

cx

def.3 ab ex *DE*, *BF* compoſita: & circumſcripta, ex *AE*, *EF*, *DG* compoſita: & excedit circumſcripta inſcriptam ſpatio ex *AE*, *EF*, *FG* parallelogrammis compoſito. Sed ex *AE*, *EF*, *FG* compoſitum ſpatium parallelogrammo *DG* eſt æquale. ergo excedit circumſcripta inſcriptam quantitate *DG*. Et quoniam *CE*, *DF*, ſunt ordinatę per diuiſionum puncta *C*, *D* quibus totidem adiacent parallelogramma, vel *AE*, *CF*, vel *DE*, *BF*.
def.33b Ergo adſcripta eſt ex *DE*, *BF*, vel ex *AE*, *CF*. ſunt autem *AE*, *CF*, ipſis *DE*, *BF* æqualia, ex quibus componitur inſcripta. Ergo adſcripta eſt æqualis inſcriptæ. Quæ &c.

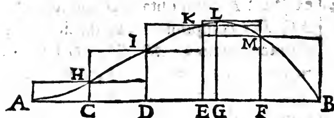
Quare &c.

Probl. 3. Prop. 5.

SVper data baſi propoſitæ formæ non primi neque vltimi lateris, per datum numerum diuiſa in partes ęquales; tres figuras ex parallelogrammis deſcribere, inſcriptam, circumſcriptam, & adſcriptam: & oſtendere, quod circumſcripta excedit adſcriptam, quantitate rectanguli ſub maxima ordinatarum, & ſub vna æqualium baſis partium: & quod adſcripta excedit inſcriptam, non maiori quantitate.

Hypoth.

Eſto propoſitæ formæ data baſis *AB*, diuiſa in datas partes æquales *AC*, *CD*, *DE*, *EF*, *FB*: & eſto *A*, finis abſciſſarum; & *B*, finis reſiduarum. Opor-



Oportet describere inscriptam, circumscriptam, & adscriptam.

Constr.

Assumantur numeri denominantes formam propositam, secundum quos diuidatur *AB* in partes proportionales in *G*, vt abscissa *AG*, ad residuam *GB*, sic se habeat, sicut denominantium
2.*h*. numerorum prior ad posteriorem. Constat per
3.*h*. *G* punctum, esse maximam ordinatam. Inueniantur per *C*, *D*, *E*, *G*, *F*, ordinatæ *CH*, *DI*, *EK*, *GL*, *FM*; & esto *MF*, minor, quàm *EK*: & compleantur parallelogramma *AH*, *CI*, *DK*, *ELF*, *MB*, *HD*, *IE*, *EM*, *KF*.

Dico inscriptam esse ex *HD*, *IE*, *EM*: circumscriptam ex *AH*, *CI*, *DK*, *ELF*, *MB*: adscriptam ex *AH*, *CI*, *DK*, *EM*, vel ex *HD*, *IE*, *KF*, *MB*: & circumscriptam excedere adscriptam, quantitate rectanguli *ELF*: & adscriptam excedere inscriptam non maiori, quàm rectanguli *ELF* quantitate.

De-

Demonstr.

2. h. Ordinatarum per omnia *BF* puncta, maxima est per *F*, nulla per *B*: ergo inter ordinatam per *F*, & parallelam per *B*, minimum parallelogram-
def.32h morum includentium formam est *MB*, ideoque ad circumscriptam pertinens figuram: nullum verò est intra formam iacentium. Item ordinatarum per omnia *EF* puncta maxima est per *G*; & per *F*, minor, quàm quæ per *E*, est minima: & inter ordinatas *EK*, *FM* minimum parallelogrammorum includentium formam, est *ELF*, & intra formam iacentium maximum *EM*; ideoque ad circumscriptam pertinet *ELF*; ad inscriptam ve-
def.31h rò *EM*. Similiter ostendetur, quod *DK*, *CI*, *AH* pertinent ad circumscriptam; & *HD*, *IE* ad inscriptam. Quare inscripta est ex *HD*, *IE*, *EM*: & circumscripta *AH*, *CI*, *DK*, *ELF*, *MB*. Et quoniam *CH*, *DI*, *EK*, *FM* sunt ordinatæ, quibus adiacent parallelogramma *AH*, *CI*, *DK*, *EM*,
def.33h vel *HD*, *IE*, *KF*, *MB*: manifestum est adscriptam ex *AH*, *CI*, *DK*, *EM*, vel ex *HD*, *IE*, *KF*, *MB* compositam esse. Excedit autem circumscripta adscriptam spatijs, *AH*, *HI*, *IK*, & excessu *ELF*, supra *KF*; vel spatijs *KLM*, *MB*: quæ vtralibet sunt æqualia vni rectangulo *ELF*: excedit ergo circumscripta adscriptam, quantitate rectanguli *ELF*. Adscripta vero excedit inscriptam spa-

ſpatijs *AH*, *HI*, *IK*; vel ſpatijs *KM*, *MB*: quæ vtralibet non maiora ſunt rectangulo *ELF*: excedit ergo adſcripta inſcriptam, non maiori quantitate, quàm ſit *ELF*. Quę &c.

Quare &c.

Probl. 4. Prop. 6.

INuenire numerum, per quem propoſitæ formæ datæ baſis diuidatur, vt circumſcripta, & inſcripta ſint propiores æqualitati, quàm in data ratione inæqualitatis.

Hypoth.

Eſto data baſis *B*, dataque ratio maioris inæqualitatis *c* ad *d*.

Oportet numerum inuenire, per quem cum diuiſa fuerit *B*, & figuræ circumſcripta & inſcripta deſcriptæ fuerint, circumſcripta ad inſcriptam, minor ſit, quàm vt *c* ad *d*.

Conſtr.

Aſſumatur quilibet numerus, per quem diuidatur *B*: & inſcripta deſcribatur figura *E*: & inueniatur quantitas *F*, ad quàm *E*, maior eſt,
5. *h*.
quàm vt *c* ad *c*---*d*. Aſſignetur etiam, in ipſa *B*,
2. *h*.
punctum: per quod maxima ordinatarum inueniatur *G*: & ad *G* applicetur quantitas *F*, vt fiat latitudo *H*: & ſumatur ipſius *H* multiplex *L*, maior quàm dupla *B*: & quotuplex eſt *L* ad *H*, totus numerus eſto *M*.
3. *h*.

Dico *M*, eſſe numerum, per quem, cum diuiſa fuerit *B*; & figuræ circumſcripta, & inſcripta, fuerint deſcriptæ: cir-

circumscripta ad inscriptam minor est, quàm vt *c* ad *d*.

Præpar.

Quotus est *M*, tota pars ipsius *B* accipiatur
5. h. *N*. & diuisa basi per numerum *M*, sit inscripta
figura *Q*, circumscripta *R*, adscripta *S*.

Demonstr.

2. p. Quoniam *B* ad *N*; est vt *M* ad vnitatem, vel
vt *L* ad *H*: permutando *B* ad *L*, est vt *N* ad
1. p. *H*: & 2*B* ad *L*, vt 2*N* ad *H*. Sed 2*B*, minor
est, quàm *L*: ergo 2*N*, minor est, quàm *H*: ergo 2*GN* rectangulum, minus est rectangulo *GH*.
sed rectangulum *GH*, est æquale ipsi spatio *F*: ergo 2*GN*, minus est, quàm *F*. Et est *E* ad 2*GN*,
ratio maior, quàm *E* ad *F*. Sed *E* ad *F* ratio,
maior est, quàm *c* ad *c*—*d*: ergo *E* ad 2*GN*
ratio, maior est, quàm *c* ad *c*---*d*. Est autem *R*, maior, quàm *E*: ergo *R* ad 2*GN* ratio, maior est,
5. h. quàm *c* ad *c*---*d*. Est autem *R*—*S*, ęqualis ipsi
GN: & *S*---*Q*, non maior est, quàm 2*GN*: ergo *R* ad *R*---*Q*, maior est, quàm *c* ad *c*---*d*:
3. 3. ergo, per conuersionem rationis, *R* ad *Q*, minor est, quàm vt *c* ad *d*. Ergo *M* est numerus
per quem &c. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 3. Prop. 7.

ADscripta, & forma, sunt quasi æquales.

Demonstr.

Nam data qualibet inæqualitatis ratione, possunt inueniri, circumscripta formæ, & inscripta, propiores æqualitati: est autem vtralibet adscripta, & forma, minor, quàm circumscripta, & maior, quàm inscripta: ergo potest inueniri adscripta ad formam propior æqualitati, quàm in data qualibet inæqualitatis ratione. Quare adscripta, & forma, sunt quasi æquales.

6. *h.* 5. *h.* 67. 5. *def.* 3. 3.

Theor. 4. *Prop.* 8.

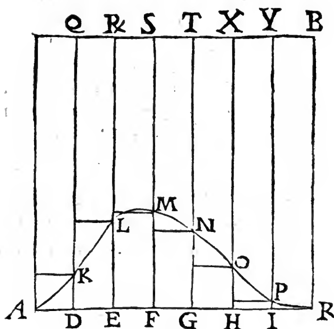
ADscripta cuiusque formæ, ad formam in vertice formosæ tabulæ, est vt à radice numero partium basis, massa homonyma, ad totam vnitate plus ordinatã, quàm sit basis tabulæ speciosæ, ad quam pertinet massa.

Hypoth.

Sunto duæ formæ, vna in vertice formosæ *FO.u*, quæ est quadratum *AB*; altera *FO.* 1 0*a*2*r*3, super eadem basi *AR*: in qua finis abscissarum *A*; finis residuarum *R*. Et esto *AR* diuisa in partes æquales, mediãtibus pũctis *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I*: per quæ ordinatæ sint, in altera forma, rectæ *DK*, *EL*, *FM*, *GN*, *HO*, *IP*; & in quadrato, sint *DQ*, *ER*, *FS*, *GT*, *HX*, *IY*. & sint *AK*, *DL*, *EM*, *FN*, *GO*, *HP* parallelogramma, ex quibus componitur adscripta, quæ vocetur *S*: & *AQ*, *DR*, *ES*, *FT*, *GX*, *HY*, *IB* parallelogramma æqualia, in quę diuiditur

def. 12 *h.*

uiditur



uiditur quadratum *AB*. Assumatur etiam numerus *t*, partium æqualium ipsius *AR*: & à radice *t*, massa *O.*1*0a2r3*, quæ ad quintam basim pertinet speciosæ tabulæ: sumaturque ab eadem radice *t*, tota sexta *t6*.

Dico *AB* ad *S*, esse vt *t6* ad *O.*1*0a2r3*, à radice *t*.

Demonstr.

Quoniam *AR* ad *DK*, rationem habet compositam, ex duplicata *AR* ad *AD*, & ex triplicata *AR* ad *RD*, & ex subdecupla: videlicet pro abscissa vnitate *a*, compositam ex *t2* ad *a2*, & ex *t3* ad *r3*, & ex subdecupla: ideſt,

 eamdem,

eamdem, quàm $t5$ ad $1042r3$, pro abſciſſa vnitate. ſed *AQ* ad *AK*, eſt vt *AR* ad *DK*: ergo *AQ* ad *AK*, eſt vt $t5$ ad $1042r3$, pro abſciſſa vnitate. Similiter *DR* ad *DL*, eſt vt $t5$ ad $1042r3$ pro abſciſſo binario: necnon ſimiliter pro reliquis abſciſſis numeris. Sunt autem tot parallelogramma componentia aſcriptam *S*, quot ordinatæ per puncta *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I*; totidemque, quot ipſa puncta: & vnitate pauciores, quàm numerus partium ipſius *AR*; nempe totidem, quot ſunt eiuſdem numeri *t* abſciſſiones, & abſciſſæ. Ergo per homologiam, æquemultiplicato vtrimque antecedente per *t*, collectiſque conſequentibus, quadratum *AB*, ad adſcriptam *S*, eſt vt *t*, ad $O.1042r3$. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 5. Prop. 9.

FOrma omnes multiplæ, ad formam omnes ſimplas eaſdem proportionales, ſuper eadem baſi iacentem, eſt æquemultipla.

Hypoth.

Eſto *A* forma omnes duplæ: & eſto *B* forma omnes ſimplæ eædem proportionales, ſuper communi baſi iacentes.

Dico *A* ad *B* duplam eſſe.

Demonſtr.

Diuiſa enim communi baſi, per quemlibet numerum, in partes æquales, ordinatę per puncta diuiſio-

def. 30 h

uisionum in *A*, duplæ sunt ordinatarum per eadem puncta in *B*, singulæ singularum: & adiacentia parallelogramma, quæ adscriptas componunt, dupla sunt singula singulorum; & simul omnia simul omnium: & adscripta *A*, adscriptæ *B* est du-
def.33b pla: sed adscripta *B* quasi est æqualis ad suam for-
7. b. mam *B*: ergo adscripta *A*, quasi est dupla for-
31. 3. mæ *B*: sed forma *A* quasi est æqualis adscriptæ
7. b. *A*: & sunt formæ *A*, *B*, quantitates determinatæ.
33. 3. Ergo *A* ad *B* est dupla. Quod &c. Quare &c.

Theor. 6. Prop. 10.

OMnes quadraturæ super eadem basi constitutæ, sunt inter se æquales.

Demonstr.

8. b. Nam adscripta cuiuslibet quadraturæ, ad formam in vertice formosæ tabulæ iacentem, est vt quadratrix homonyma, ad totam vnitate plus ordinatam, quàm in qua basi est quadratrix in sua ta-
18. 3. bula: sed quadratrix ad huiusmodi totam, quasi est æqualis: ergo adscripta quadraturæ, ad formam in vertice formosę iacentem, quasi est ęqua-
7. b. lis: sed & ad suam quadraturam quasi est æqualis:
33. 3. ergo quadratura ad formam in vertice formosæ iacentem, est æqualis. Quare omnes quadraturæ, cum eidem determinatæ formæ sint æquales, inter se sunt æquales.

Theor. 7. Prop. 11.

IN vna quaſque baſi tabulæ ſubquadraturarum, ſubquadraturæ ſunt æquales: & ſimul omnes, componunt quantitatem formæ, in vertice formoſæ tabulæ iacentis.

Demonſtr.

def. 28 b Nam in vnaquaque baſi tabulæ ſubquadratu-
9. b. rarum, quadraturæ ſunt æquemultiplæ. Sed æqua-
10. b. les, ipſæ ſunt inter ſe quadraturæ: ergo æquales etiam ſunt inter ſe ſubquadraturæ.

Deinde in vnaquaque baſi tabulæ ſubquadraturarum, quotupla eſt quadratura vna vnius, tot ſunt ſubquadraturæ: atque totupla eſt ſumma omnium ſubquadraturarum, ad vnam tantùm. quare ſumma omnium ſubquadraturarum, vni quadra-
10. b. turæ eſt æqualis: ſed vnaquælibet quadratura æqualis eſt formæ in vertice formoſæ tabulæ iacenti. Quare in vnaquaque baſi tabulæ ſubquadraturarum, ſumma omnium, æqualis eſt vni formæ, in vertice formoſæ tabulæ iacenti.

Porrò in Tabula Formoſa, in ipſius formis, præter ea, quæ in epiſtola ad Excellentiſsimum Caſsinum commemoraui ex meo libello Nouarum Quadraturarum alia inueni duo, quæ hic pro coronide recenſebo: aliàs publicanda cum demonſtratione, ſi Deus otium, & vlteriorem fortunam conceſſerit.

Vnum de mixtilineis angulis, & de cornibus formarum; & de angulorum quantitatibus, videlicet.

Se-

Secundæ basis secunda & penultima forma, est binangula, cuius angulorum sinus rectus duplus versi. tertiæ verò, & quartę, ac reliquarum deinceps omnium basium formæ, prima & vltima, secunda & penultima, sunt vnicornes, & vnangulæ; quarum sinus rectus angulorum, ad versum totuplus est, quotus est ordo basis: in tertia, triplus; in quarta, quadruplus; in quinta quintuplus, & sic deinceps. reliquæ demum formæ omnes, sunt bicornes.

Alterũ de centris grauitatum bipartitum, cuius prima pars est. Cuiusque formæ in tabula formosa, recta linea per centrum grauitatis ordinata, facit partes basis reciprocè proportionales, abscissam ad residuam, sicut eius ordinum numeri in sua basi à prima, & ab vltima. Exempli gratia. Formæ in quarta basi, secundæ trivltimæ per centrum ordinata, facit partes basis, abscissam ad residuam proportionales, vt 3 ad 2, ordo trivltimæ ad ordinem secundæ.

Secunda pars est. In vnaquaque forma, linea ex centro grauitatis ducta ordinatim ad basim, à basi, & centro finita, dicetur, Altitudo centralis. Itaque formarum in tabula formosa, centrales altitudines habent reciprocam rationem compositam ex rationibus numerorum, qui quadraturas ex formis producunt; ex directa iacentium in iisdem basibus, & lateribus tabulæ quadraturarum, & ex conuersa iacentium in basibus duplordinatis, & in lateribus vnitate minùs, quàm duplordinatis. Exempli gratia. Centralis altitudo *FO.a4r2.* formæ in sexta basi tertiæ quintultimæ, ad centralem altitudinem *FO.a3r6*, formæ in nona

basi

baſi ſeptimæ quartultimæ, rationem habet compoſitam ex rationibus numerorum quadraturas producentium ex formis; ex ratione, inquam, 105, tertij quintultimi in ſexta baſi, ad 840, ſeptimum quartultimum in nona baſi; & ex ratione 352716, tredecimi ſeptimultimi in decima octaua baſi, ad 6435, quintum nonultimum in duodecima baſi.

Vel aliter. Altitudines centrales formarum in tabula formoſa iacentium, rationem habent compoſitam, tum ex ratione earumdem formarum conuerſa, tum etiam ex directa aliarum in eadem tabula in baſibus duplordinatis, & in lateribus vnitate minùs quàm duplordinatis. Exempli gratia. Centralis altitudo *FO.a4r2*, ad centralem *FO.a3r6*, rationem habet compoſitam, ex rationibus, *FO.a3r6*, ad *FO.a4r2*; & *FO.a8r4*, ad *FO a6r12*.



DEO GRATIAS.





